



Universidade Federal
do Espírito Santo



lcad
LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO
DE ALTO DESEMPENHO

Problemas Dependentes do Tempo Parte II

Isaac P. Santos

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

2018/1

Resultados Preliminares

Considere f uma função real contínua definida em $[a, b]$. Se F é uma função tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^x f(s)ds = F(x) - F(a)$$

e

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt.$$

Por exemplo: Se $F(t) = \|u(t)\|$ então

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \|u(s)\| ds = \|u(t)\| - \|u(0)\|.$$

Análise de Estabilidade

Considere o problema parabólico mais geral:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in J = (0, T], \quad (1)$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in J = (0, T], \quad (2)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0(x), \quad (3)$$

onde $\mathcal{L}u$ é um operador elíptico. Por exemplo,

$$\mathcal{L}u = -\Delta u.$$

Análise de Estabilidade

A formulação variacional contínua desse problema é: dado $t \in J$, achar $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right) + a(u(t), v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Considerando uma discretização no espaço usando o MEF e o tempo contínuo, obtemos o MEF: dado $t \in J$, achar $u_h(t) \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v_h \right) + a(u_h(t), v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \subset H_0^1(\Omega). \quad (4)$$

Análise de Estabilidade

Para problemas de evolução, isto é, problemas que dependem do tempo existe o interesse em saber como se comporta a solução aproximada à medida que o tempo avança.

Na verdade, desejamos saber se a solução explode (cresce sem limites) ou se é limitada pelos coeficientes da equação (exemplo, condição inicial e o termo do lado direito). Desejamos obter estimativas do tipo

$$\|u_h\| \leq C(u_0, f), \quad (5)$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma apropriada que mede o tamanho da solução aproximada u_h , u_0 é a solução inicial e f é o termo de fonte. Note que u_0 e f são dados do problema.

Análise de Estabilidade

No **problema semidiscreto**, considera-se uma discretização do espaço, no nosso caso, usando o método de elementos finitos, gerando um sistema de EDOs em função da variável tempo, que é considerada contínua.

Em um primeiro momento, desejamos obter uma estimativa de estabilidade do tipo

$$\|u_h(t)\| \leq C(u_0, f),$$

para $t \in J$. Chamaremos essa estimativa **estabilidade com espaço discretizado**.

Estabilidade com espaço discretizado

Escolhendo $v_h = u_h$ em (4) obtemos

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) + a(u_h, u_h) = (f, u_h). \quad (6)$$

O primeiro termo de (6) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \right) u_h d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial (u_h^2)}{\partial t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_h^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Estabilidade com espaço discretizado

Então reescrevemos (6) como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(u_h, u_h) = (f, u_h). \quad (7)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito de (7), obtemos

$$(f, u_h) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como $a(u_h, u_h) \geq 0$, equação (7) resulta em

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (8)$$

Estabilidade com espaço discretizado

O lado esquerdo de (8) pode ser escrito como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_h\|_{L^2(\Omega)} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Então, substituindo esse resultado em (8),

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como $\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (9)$$

Lembre-se que $u_h = u_h(\cdot, t)$. Integrando a equação (9) no tempo, de 0 até t , temos

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \|u_h(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds. \quad (10)$$

Estabilidade com espaço discretizado

Mas,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \|u_h(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds &= \|u_h(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= \|u_h(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} - \|u_h(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Então, substituindo esse resultado em (10), segue que

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Como $u_h(\cdot, 0) = u_0$, obtemos a seguinte estimativa de estabilidade:

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds. \quad (11)$$

Estabilidade com espaço discretizado

Estimativa de estabilidade:

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Essa expressão diz que a norma em $L^2(\Omega)$ da solução aproximada $u_h(\cdot, t) = u_h(t)$ obtida pelo MEF no espaço é limitada por uma constante que depende da condição inicial u_0 e de f .

Esse resultado garante que a solução aproximada u_h (medida na norma de $L^2(\Omega)$) permanece limitada para todo tempo $t > 0$.

Estabilidade com discretização total

No caso anterior consideramos o espaço discretizado (pelo MEF) e o tempo contínuo.

Agora vamos considerar o espaço e o tempo discretizado. O espaço discretizado pelo MEF e o tempo por métodos de diferenças finitas.

Como existem vários métodos de diferenças finitas, para cada um deles existe um estudo de estabilidade.

Estabilidade com discretização total

No caso anterior consideramos o espaço discretizado (pelo MEF) e o tempo contínuo.

Agora vamos considerar o espaço e o tempo discretizado. O espaço discretizado pelo MEF e o tempo por métodos de diferenças finitas.

Como existem vários métodos de diferenças finitas, para cada um deles existe um estudo de estabilidade.

Agora temos uma solução aproximada $u_{h,k}$ que é uma aproximação para a solução $u_h(t_k)$. Desejamos obter estimativas do tipo

$$\|u_{h,k}\| \leq C(\Delta t, u_0, f),$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma apropriada que mede o tamanho da solução aproximada $u_{h,k}$, u_0 é a solução inicial e f é o termo de fonte.

Estabilidade com discretização total: Euler Implícito

Considere o problema (4) discretizado no tempo pelo método de Euler Implícito:

$$\left(\frac{u_{h,k} - u_{h,k-1}}{\Delta t_k}, v_h \right) + a(u_{h,k}, v_h) = (f_k, v_h). \quad (12)$$

Escolhendo $v_h = u_{h,k}$, e abrindo as contas, a equação (12) pode ser escrita como

$$(u_{h,k}, u_{h,k}) + \Delta t_k a(u_{h,k}, u_{h,k}) = \Delta t_k (f_k, u_{h,k}) + (u_{h,k-1}, u_{h,k}) \quad (13)$$

ou

$$\|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t_k a(u_{h,k}, u_{h,k}) = \Delta t_k (f_k, u_{h,k}) + (u_{h,k-1}, u_{h,k}) \quad (14)$$

Estabilidade com discretização total: Euler Implícito

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos dois termos do lado direito de (14), obtemos

$$(f_k, u_{h,k}) \leq \|f_k\|_{L^2(\Omega)} \|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)}.$$

e

$$(u_{h,k-1}, u_{h,k}) \leq \|u_{h,k-1}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como $a(u_{h,k}, u_{h,k}) \geq 0$, equação (14) resulta em

$$\|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Delta t_k \|f_k\|_{L^2(\Omega)} \|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{h,k-1}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (15)$$

Como $\|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, obtemos

$$\|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \Delta t_k \|f_k\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{h,k-1}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (16)$$

Estabilidade com discretização total: Euler Implícito

Aplicando a desigualdade (16) para o tempo t_i com $i = 1, 2, 3, \dots, k$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|u_{h,1}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{h,0}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t_1 \|f_1\|_{L^2(\Omega)} \\
 \|u_{h,2}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{h,1}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t_2 \|f_2\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \|u_{h,0}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t_1 \|f_1\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t_2 \|f_2\|_{L^2(\Omega)} \\
 \|u_{h,3}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{h,2}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t_3 \|f_3\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \|u_{h,0}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t_1 \|f_1\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t_2 \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t_3 \|f_3\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\vdots \\
 \|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{h,0}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^k \Delta t_i \|f_i\|_{L^2(\Omega)},
 \end{aligned}$$

que é a estimativa de estabilidade do método de Euler implícito (regressivo).

Estabilidade com discretização total: Euler Implícito

Estimativa de estabilidade do método Euler implícito:

$$\|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{h,0}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^k \Delta t_i \|f_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Considerando $\Delta t = \max_{k=1,\dots,m} \{\Delta t_k\}$ ou uma malha uniforme, a estimativa de estabilidade resulta em

$$\|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{h,0}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (17)$$

A norma em $L^2(\Omega)$ da solução aproximada $u_{h,k}$ obtida pelo MEF no espaço e Euler implícito no tempo é limitada por uma constante que depende da condição inicial u_0 , f e Δt .

Estimativas de erro

Nas **estimativas de estabilidade** o objetivo é mostrar que a solução aproximada é limitada em função dos dados do problema (solução inicial, termo de fonte).

Nas **estimativas de erro** o objetivo é mostrar que o erro $e = u - u_h$ (diferença entre a solução exata e a solução aproximada), medido em alguma norma apropriada, tende a zero quando h (e/ou Δt) tende a zero.

Essas estimativas de erro são importantes para mostrar a **convergência** de métodos numéricos.

Existem dois tipos de estimativas de erro: estimativa *a priori* e estimativa *a posteriori*.

A estimativa de erro *a priori* expressa o erro em termos da solução exata u , enquanto que a estimativa de erro *a posteriori* expressa o erro em termos da solução numérica u_h .

Estimativas de erro *a priori*

Estimativas de erro para problemas dependentes do tempo podem ser obtidas combinando estimativas de erro do problema estacionário com estimativas de estabilidades (obtidas anteriormente);

Como no caso das estimativas de estabilidade, as estimativas de erro serão obtidas nos seguintes casos:

- ▶ **espaço discretizado e tempo contínuo.** Neste caso queremos determinar o erro

$$\|u(t) - u_h(t)\|,$$

onde $t \in J$.

- ▶ **espaço e tempo discretizados.** Neste caso queremos determinar erro

$$\|u - u_{h,k}\|.$$

Estimativas de erro *a priori*

Vamos considerar primeiro o caso em que somente o espaço é discretizado (isto é, o tempo é contínuo).

A formulação variacional do problema contínuo pode ser descrito como: dado $u(\cdot, 0) = u_0$, achar $u : (0, T] \longrightarrow V = H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right) + a(u(t), v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (18)$$

O problema semidiscreto (discretização no espaço usando o MEF e o tempo contínuo) é descrito como: dado $u(\cdot, 0) = u_0$, achar $u_h : (0, T] \longrightarrow V_h \subset V$ tal que

$$\left(\frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v_h \right) + a(u_h(t), v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (19)$$

Estimativas de erro *a priori*

Como $V_h \subset V$ então a equação (18) é satisfeita para $v = v_h \in V_h$, isto é,

$$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v_h \right) + a(u(t), v_h) = (f, v_h). \quad (20)$$

Subtraindo a equação (19) de (20) obtemos

$$\left(\frac{\partial(u(t) - u_h(t))}{\partial t}, v_h \right) + a(u(t) - u_h(t), v_h) = 0, \quad (21)$$

uma vez que os termos dessas equações são lineares.

Estimativas de erro *a priori*

Vamos dar uma pausa na equação (21) para revisar alguns conceitos do problema estacionário, lembrando que queremos obter uma estimativa para o erro

$$\|u(t) - u_h(t)\|$$

em alguma norma apropriada.

No problema elíptico ou estacionário (não dependente do tempo), estimativas de erros são obtidas considerando que a solução aproximada u_h obtida pelo MEF de Galerkin é a projeção ortogonal no espaço V_h da solução $u \in V$, com respeito ao produto interno definido pela forma bilinear $a(u, v)$ (simétrica).

Estimativas de erro *a priori*

Em problemas dependentes do tempo, esse resultado não é verdadeiro. Mas podemos definir uma projeção ortogonal, chamada de projeção de Ritz, em relação a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ da seguinte forma:

$$R_h : V \xrightarrow{\quad} V_h, \\ u(t) \mapsto R_h(u(t))$$

satisfazendo

$$a(u - R_h(u), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h, \quad (22)$$

onde $u = u(t) = u(\cdot, t)$.

A projeção de Ritz será usada como valor intermediário entre a solução exata $u(t)$ e a solução aproximada $u_h(t)$. Dessa forma, podemos decompor o erro da seguinte forma

$$\|u - u_h\| = \|u - R_h u + R_h u - u_h\| \leq \|u - R_h u\| + \|R_h u - u_h\|.$$

Estimativas de erro *a priori*

Teorema

O projetor de Riez $R_h u$, definido em (22), satisfaz as estimativas

$$\|u(t) - R_h u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}, \quad (23)$$

$$\|u(t) - R_h u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}, \quad (24)$$

para cada t fixo em J . Além disso,

$$u(t) \in H^2(\Omega), \quad R_h u(t) \in V_h,$$

onde

$$V_h = \{u \in C^0(\Omega); \quad v|_K \in \mathbb{P}_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Estimativas de erro *a priori*

Estimativa na norma de $L^2(\Omega)$:

Teorema

Sejam $u(t)$ a solução do problema xxx e $u_h(t)$ a solução do problema xxx. Então o erro $e(t) = u(t) - u_h(t)$ medido na norma do espaço $L^2(\Omega)$ satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{H^2(\Omega)} ds \right), \quad (25)$$

Estimativas de erro *a priori*

Demonstração:

Escrevemos o erro da seguinte forma:

$$u(t) - u_h(t) = u(t) - R_h u(t) + R_h u(t) - u_h(t) = \rho(t) + \varphi(t),$$

onde $\rho(t) = u(t) - R_h u(t) \in V$ e $\varphi(t) = R_h u(t) - u_h(t) \in V_h$. Então,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \|u(t) - R_h u(t) + R_h u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u(t) - R_h u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|R_h u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\rho(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{26}$$

O termo $\|\rho(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|u(t) - R_h u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ é facilmente limitado usando a estimativa (23):

Estimativas de erro *a priori*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \|\rho(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \|u(t) - R_h u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq Ch^2 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \\
 &= Ch^2 \left\| u_0 + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s} ds \right\|_{H^2(\Omega)} \\
 &\leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{H^2(\Omega)} ds \right), \tag{27}
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $u(t) = u_0 + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s} ds$ e $\| \int_a^b f(x) dx \| \leq \int_a^b \| f(x) \| dx$.

Limitaremos agora o termo $\|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|R_h u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}$:

Estimativas de erro *a priori*

Demonstração:

Voltamos a equação (21):

$$\left(\frac{\partial(u(t) - u_h(t))}{\partial t}, v_h \right) + a(u(t) - u_h(t), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (28)$$

Essa equação é reescrita como

$$\left(\frac{\partial(\rho(t) + \varphi(t))}{\partial t}, v_h \right) + a(\rho(t) + \varphi(t), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h$$

ou

$$\left(\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}, v_h \right) + \left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}, v_h \right) + a(\rho(t), v_h) + a(\varphi(t), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (29)$$

Estimativas de erro *a priori*

Demonstração:

Usando (22) temos que

$$a(\rho(t), v_h) = 0.$$

Logo a equação (29) resulta em

$$\left(\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}, v_h \right) + \left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}, v_h \right) + a(\varphi(t), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

ou

$$\left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}, v_h \right) + a(\varphi(t), v_h) = \left(-\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}, v_h \right), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (30)$$

A equação (30) diz que $\varphi(t) = R_h u(t) - u_h(t) \in V_h$ satisfaz a formulação variacional discreta (19) com termo de fonte $f = -\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}$. Neste caso, vale a estimativa de estabilidade (11):

Estimativas de erro *a priori*

Demonstração:

$$\|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial \rho(s)}{\partial s} \right\|_{L^2(\Omega)} ds. \quad (31)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)} &= \|R_h u(0) - u_h(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u(0) - u_h(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|R_h u(0) - u(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|R_h u(0) - u(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch^2 \|u(0)\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (32)$$

e

Estimativas de erro *a priori*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \partial_t u(t) - \partial_t R_h u(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &= \left\| \partial_t u(t) - R_h \partial_t u(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq Ch^2 \left\| \partial_t u(t) \right\|_{H^2(\Omega)}
 \end{aligned} \tag{33}$$

Substituindo (32) e (33) em (31) obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \|u(0)\|_{H^2(\Omega)} + Ch^2 \int_0^t \|\partial_s u(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \\
 &\leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \|\partial_s u(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \right)
 \end{aligned} \tag{34}$$

Estimativas de erro *a priori*

Demonstração:

Agora, usando (34) e (27) em (26) obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\rho(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \|\partial_s u\|_{H^2(\Omega)} ds \right), \end{aligned}$$

finalizando a prova do teorema.

Estimativas de erro *a priori*

Vamos considerar o problema discretizado no espaço e no tempo. A discretização no espaço é feita pelo método MEF e no tempo com métodos de diferenças finitas.

Neste caso queremos determinar erro

$$\|u(\cdot, t) - u_{h,k}\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma apropriada.

Como a solução aproximada $u_{h,k}$ é obtida utilizando um método específico de diferenças finitas no tempo, a estimativa de erro obtida será dada para um determinado método de diferenças finitas escolhido.

Estimativas de erro *a priori*

Estimativa na norma de $L^2(\Omega)$ - Euler implícito:

Teorema

Seja a solução exata u suficientemente regular. Considere a discretização completa utilizando MEF no espaço e Euler implícito no tempo, onde Então o erro na norma de $L^2(\Omega)$ é limitado para cada $k = 1, 2, \dots$ por

$$\|u(\cdot, t) - u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^{t_k} \|\partial_s u\|_{H^2(\Omega)} ds \right) + C\Delta t \int_{t_0}^{t_k} \|\partial_s^2 u\|_{L^2(\Omega)} ds \quad (35)$$

Obs: isso significa que o erro é da ordem de $\mathcal{O}(h^2 + \Delta t)$.

Demonstração

Por simplicidade, vamos assumir que o intervalo de tempo $[0, T]$ é discretizado uniformemente com tamanho do passo Δt .

Na análise do problema semidiscreto considerando o tempo contínuo, fizemos a seguinte partição do erro:

$$u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t) = (u - R_h u) + (R_h u - u_h).$$

Agora, estamos considerando o tempo discretizado também e a solução aproximada no tempo t_k é dada por $u_{h,k} \approx u(\cdot, t_k)$. Então usamos a seguinte partição para o erro:

$$u(\cdot, t_k) - u_{h,k} = (u(t_k) - R_h u(t_k)) + (R_h u(t_k) - u_{h,k}), \quad (36)$$

para $k = 1, 2, \dots, m$.

Demonstração

Fazendo $\rho_k = (u(t_k) - R_h u(t_k))$ e $\varphi_k = (R_h u(t_k) - u_{hk})$, então

$$\|u(\cdot, t) - u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\rho_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_k\|_{L^2(\Omega)}, \quad (37)$$

onde

$$\begin{aligned} \|\rho_k\|_{L^2(\Omega)} &= \|u(t_k) - R_h u(t_k)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch^2 \|u(t_k)\|_{H^2(\Omega)} \\ &= Ch^2 \left\| u_0 + \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial u}{\partial s} ds \right\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_{t_0}^{t_k} \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{H^2(\Omega)} ds \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Demonstração

Vamos agora descrever uma equação apropriada para φ_k considerando o método de Euler implícito. Recorde que método de Euler implícito é dado por (12), isto é,

$$\left(\frac{u_{h,k} - u_{h,k-1}}{\Delta t}, v_h \right) + a(u_{h,k}, v_h) = (f_k, v_h).$$

com $\Delta t = \Delta t_k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Como $\varphi_k = (R_h u(t_k) - u_{hk})$ e $\varphi_{k-1} = (R_h u(t_{k-1}) - u_{h,k-1})$ então

$$\left(\frac{u_{h,k} - u_{h,k-1}}{\Delta t}, v_h \right) = \left(\frac{R_h u(t_k) - R_h u(t_{k-1})}{\Delta t}, v_h \right) - \left(\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\Delta t}, v_h \right),$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
 a(u_{h,k}, v_h) &= a(R_h u(t_k) - \varphi_h, v_h) \\
 &= a(R_h u(t_k), v_h) - a(\varphi_h, v_h) \\
 &= a(R_h u(t_k), v_h) - a(\varphi_h, v_h) + a(u(t_k), v_h) - a(u(t_k), v_h) \\
 &= \underbrace{-a(u(t_k) - R_h u(t_k), v_h)}_{=0} - a(\varphi_h, v_h) + a(u(t_k), v_h) \\
 &= -a(\varphi_h, v_h) + a(u(t_k), v_h)
 \end{aligned}$$

Demonstração

Obtemos a seguinte equação para φ_k :

$$\left(\frac{R_h u(t_k) - R_h u(t_{k-1})}{\Delta t}, v_h \right) - \left(\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\Delta t}, v_h \right) - a(\varphi_h, v_h) + a(u(t_k), v_h) = (f_k, v_h),$$

ou

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\Delta t}, v_h \right) + a(\varphi_h, v_h) &= - \left[(f_k, v_h) - a(u(t_k), v_h) \right] + \left(\frac{R_h u(t_k) - R_h u(t_{k-1})}{\Delta t}, v_h \right) \\ &= - \left[(\partial_t u(t_k), v_h) \right] + \left(\frac{R_h u(t_k) - R_h u(t_{k-1})}{\Delta t}, v_h \right) \\ &= \left(-\partial_t u(t_k) + \frac{R_h u(t_k) - R_h u(t_{k-1})}{\Delta t}, v_h \right). \end{aligned}$$

Demonstração

Portanto, φ_k satisfaz a seguinte equação

$$\left(\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\Delta t}, v_h \right) + a(\varphi_h, v_h) = (q_k, v_h), \quad (39)$$

com

$$q_k = -\partial_t u(t_k) + \frac{R_h u(t_k) - R_h u(t_{k-1})}{\Delta t}.$$

Adicionando e subtraindo o termo $\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\Delta t}$ a q_k , resulta em

$$q_k = -\left[\partial_t u(t_k) - \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\Delta t} \right] - \left[\frac{u(t_k) - R_h u(t_k)}{\Delta t} - \frac{u(t_{k-1}) - R_h u(t_{k-1})}{\Delta t} \right] = q_k^1 + q_k^2.$$

Demonstração

Aplicando a estimativa de estabilidade (17) em (39) obtemos

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \sum_{i=1}^k \|q_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \sum_{i=1}^k \|q_i^1\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \sum_{i=1}^k \|q_i^2\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (40)$$

Precisamos limitar os termos $\|q_i^1\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|q_i^2\|_{L^2(\Omega)}$.

Demonstração

Para limitar $\|q_i^1\|_{L^2(\Omega)}$ usaremos a expansão de Taylor com resto na forma integral.

Revisando:

Teorema

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que existam as derivadas $f^{(i)}(x_0)$, $i = 1, \dots, n+1$, com $x_0 \in (a, b)$, e que $f^{(n+1)}$ seja integrável. Então, dado $x \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots + (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \int_{x_0}^x (x-s)^n \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!} ds \quad (41)$$

Demonstração

Usando uma aproximação de 1a ordem, temos

$$u(t_k - \Delta t) = u(t_{k-1}) = u(t_k) + (-\Delta t)\partial_t u(t_k) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - s)\partial_t^2 u(s)ds$$

ou melhor

$$\partial_t u(t_k) = \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-1})\partial_s^2 u(s)ds.$$

Seque então que

$$q_k^1 = -\left[\partial_t u(t_k) - \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\Delta t}\right] = -\left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-1})\partial_s^2 u(s)ds\right]$$

Demonstração

Então

$$\begin{aligned}
 \|q_i^1\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s - t_{i-1}) \partial_s^2 u(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(s - t_{i-1}) \partial_s^2 u(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\partial_s^2 u(s)\|_{L^2(\Omega)} ds,
 \end{aligned}$$

pois $(s - t_{i-1}) \leq \Delta t$.

Demonstração

Então

$$\begin{aligned}
 \Delta t \sum_{i=1}^k \|q_i^1\|_{L^2(\Omega)} &\leq \Delta t \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\partial_s^2 u(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &= \Delta t \left[\int_{t_0}^{t_1} \|\partial_s^2 u(s)\|_{L^2(\Omega)} + \cdots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\partial_s^2 u(s)\|_{L^2(\Omega)} \right] \\
 &= \Delta t \int_{t_0}^{t_k} \|\partial_s^2 u(s)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{42}
 \end{aligned}$$

Agora precisamos limitar o termo $\|q_i^2\|_{L^2(\Omega)}$, onde

$$q_i^2 = - \left[\frac{u(t_i) - R_h u(t_i)}{\Delta t} - \frac{u(t_{i-1}) - R_h u(t_{i-1})}{\Delta t} \right].$$

Demonstração

Temos que

$$\frac{u(t_i) - R_h u(t_i)}{\Delta t} - \frac{u(t_{i-1}) - R_h u(t_{i-1})}{\Delta t} = \frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{\Delta t} - \frac{R_h u(t_i) - R_h u(t_{i-1})}{\Delta t}.$$

Usando o TFC: $u(t_i) - u(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_s u(s) ds$ e o fato que $R_h(\partial_t u) = \partial_t(R_h u)$, temos.

$$\begin{aligned} \frac{u(t_i) - R_h u(t_i)}{\Delta t} - \frac{u(t_{i-1}) - R_h u(t_{i-1})}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_s u(s) ds - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_h \partial_s u(s) ds \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (I - R_h) \partial_s u(s) ds \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\partial_s u(s) - R_h \partial_s u(s) \right) ds \end{aligned}$$

Demonstração

Então,

$$\begin{aligned}
 \Delta t \sum_{i=1}^k \|q_i^2\|_{L^2(\Omega)} &= \Delta t \sum_{i=1}^k \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (I - R_h) \partial_s u(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(I - R_h) \partial_s u(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} Ch^2 \|\partial_s u(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \\
 &= Ch^2 \int_{t_0}^{t_k} \|\partial_s u(s)\|_{H^2(\Omega)} ds.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Demonstração

Substituindo (42) e (43) em (40) obtemos

$$\|\varphi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \int_{t_0}^{t_k} \|\partial_s^2 u(s)\|_{L^2(\Omega)} + Ch^2 \int_{t_0}^{t_k} \|\partial_s u(s)\|_{H^2(\Omega)}.$$

Em uma forma similar a (32),

$$\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|u_0\|_{H^2(\Omega)}.$$

Então

$$\|\varphi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_{t_0}^{t_k} \|\partial_s u(s)\|_{H^2(\Omega)} \right) + \Delta t \int_{t_0}^{t_k} \|\partial_s^2 u(s)\|_{L^2(\Omega)} \quad (44)$$

Substituindo (38) e (44) em (37) obtemos o resultado desejado.

Observação

O erro no tempo t_k da solução discretizada u_{hk} no espaço e tempo consiste de duas partes. Uma parte associada a discretização espacial com erro da ordem de $\mathcal{O}(h^2)$ e a outra associada com a discretização temporal (e com o método escolhido - Euler implícito) com erro da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t)$.

Resumo

O que provamos em termos de estabilidade e estimativas de erros?

Estabilidade na norma de $L^2(\Omega)$:

a) Tempo Contínuo (ver equação (11)):

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

b) Tempo Discretizado com Euler implícito (ver equação (17)):

$$\|u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{h,0}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Resumo

Estimativas de erro a priori na norma de $L^2(\Omega)$:

a) Tempo Contínuo (ver equação (25)):

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{H^2(\Omega)} ds \right).$$

b) Tempo Discretizado com Euler implícito (ver equação (35)):

$$\|u(\cdot, t) - u_{h,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^{t_k} \|\partial_s u\|_{H^2(\Omega)} ds \right) + C\Delta t \int_{t_0}^{t_k} \|\partial_s^2 u\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Resumo

Sugestões de atividades:

- a) Desenvolver estimativas de estabilidade na norma de $L^2(\Omega)$ para os métodos Euler explícito, Crank-Nicolson e BDF2.
- b) Desenvolver estimativas de erro *a priori* na norma de $L^2(\Omega)$ para os métodos Euler explícito, Crank-Nicolson e BDF2.
- c) Desenvolver estimativas de erro *a priori* na norma de $H^1(\Omega)$ considerando o tempo contínuo.
- d) Desenvolver estimativas de erro *a priori* na norma de $H^1(\Omega)$ para os métodos Euler explícito, Crank-Nicolson e BDF2.

Bibliografia Básica

- ▶ Mats G. Larson and Fredrik Bengzon. The Finite Element Method: Theory, Implementation and Applications. Springer, 2013.
- ▶ Mauro A. Rincon e I-Shih Liu. Introdução ao Método de Elementos Finitos. UFRJ, Instituto de Matemática, 2010.
- ▶ Alfio Quarteroni. Numerical Models For Differential Problems. Springer, 2009.