



Universidade Federal
do Espírito Santo



lcad
LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO
DE ALTO DESEMPENHO

MEF no espaço-tempo

Isaac P. Santos

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

2018/1

Introdução

Aproximações semidiscretas consistem em utilizar o MEF na discretização espacial e algum esquema de diferenças finitas para aproximar a derivada temporal.

Segundo Almeida, 1993¹ "*As primeiras tentativas de utilizar o MEF também na discretização temporal não foram muito animadoras pois utilizavam formulações em que se requeria continuidade no tempo, implicando também num acoplamento entre as variáveis em todos os níveis de tempo. Além disso, tais formulações não parecem ser muito naturais: a continuidade no tempo conduz à um esquema tal que a solução em um dado instante depende igualmente das soluções do tempo anterior e do seguinte, o que não é fisicamente razoável.*"

¹Almeida, R. C. Uma formulação de Petrov-Galerkin para resolução das equações de Euler e Navier-Stokes compressível usando técnicas adaptativas. UFRJ, 1993

Introdução

A **formulação espaço-tempo** consiste em utilizar o MEF padrão no espaço e MEF descontínuo (Galerkin descontínuo) no tempo.

Se a dimensão espacial do problema for d , então, obviamente, teremos um problema $d + 1$ -dimensional.

Para a variável temporal, devemos resolver um problema de valor inicial. Além disso, o problema a ser abordado (a equação do calor) é de 1a ordem no tempo e 2a ordem no espaço.

Como a dependência do problema em relação as variações temporal e espacial é diferente, isso sugere o uso de diferentes abordagens na discretização das duas variáveis (espacial e temporal), mesmo no caso em que se utiliza o MEF em ambas variações.

Introdução

Vantagens da formulação espaço-tempo:

- ▶ desenvolvimento de malhas adaptativas (em cada passo de tempo) baseado em estimativas de erro *a posteriori*.

Desvantagens da formulação espaço-tempo:

- ▶ O número de graus de liberdade é maior.

Introdução

Considere o problema (de convecção-difusão-reação transiente):

Achar a função $u = u(x, t)$ tal que

$$\partial_t u - \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \partial_x u + \sigma u = f, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T], \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, L), \quad (3)$$

onde $\epsilon > 0$, $\sigma \geq 0$ e β são constantes reais, $f \in L^2(0, 1)$ para cada $t \in (0, T)$ e $u_0 \in L^2(0, 1)$.

Formulação variacional desse problema?

Introdução

Formulação Variacional:

Para cada $t \in (0, T]$, achar a função $u \in H_0^1(0, L)$ tal que $u(x, 0) = u_0$ e

$$\int_0^L \partial_t u v dx + a(u, v) = \int_0^L f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, L), \quad (4)$$

onde $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear dada por

$$a(u, v) = \epsilon \int_0^L (\partial_x u)(\partial_x v) dx + \beta \int_0^L (\partial_x u) v dx + \sigma \int_0^L u v dx.$$

Introdução

Se $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, é o domínio espacial e $[0, T]$ é o domínio temporal, o problema é então discretizado no espaço-tempo $Q = \Omega \times [0, T]$.

No tempo usaremos FEM descontínuo. Isso permite tratar o problema temporal localmente, em cada intervalo de tempo.

Considere uma partição do domínio temporal $[0, T]$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = T.$$

Denotamos por $J_k = (t_{k-1}, t_k)$ o k -ésimo subintervalo temporal, onde

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

Introdução

A região de integração no tempo em cada passo de tempo k é

$$\Omega \times \bar{J}_k,$$

onde $\bar{J}_k = [t_{k-1}, t_k]$ (fecho de J_k).

A região $S_k = \Omega \times \bar{J}_k$ é chamado de **space-time slab**.

Vamos descrever o método considerando $d = 1$, isto é, $\Omega = (0, L)$. Apresentaremos duas abordagens:

- a) Aproximação **linear por partes** no espaço e **constante por partes** no tempo;
- b) Aproximação **linear por partes** no espaço e no tempo;

Introdução

Em cada região (*slab*) a discretização espacial (malha espacial) introduz um conjunto de retângulos a serem definidos a seguir.

- ▶ No tempo t_k , considere uma partição $\mathcal{T}_{hk}$ do domínio espacial $\Omega = (0, L)$ em n^k subintervalos (elementos) $K_j^k = [x_{j-1}^k, x_j^k]$, $j = 1, \dots, n^k$:

$$0 = x_0^k < x_1^k < x_2^k < \dots < x_{n^k}^k = L.$$

Denotamos por

$$h_j^k = x_j^k - x_{j-1}^k, \quad h_k = \max_{j=1, \dots, n^k} \{h_j^k\}, \quad h = \max_{k=1, \dots, m} \{h_k\}.$$

- ▶ Associamos com a região $S_k = \Omega \times J_k$ a partição $\mathcal{P}_k = \bigcup_{j=1}^{n^k} R_j^k$, onde o retângulo

$$R_j^k = K_j^k \times J_k.$$

Descrição da formulação

A região (*space-time slab*) S_k é decomposta em retângulos R_j^k , conforme figura abaixo.

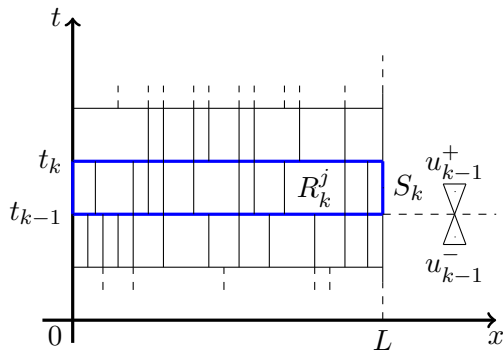


Figure: Discretização MEF no espaço-tempo

Descrição da formulação

Para cada região (*space-time slab*) S_k introduzimos o espaço de elementos finitos no espaço-tempo:

$$\mathbb{Q}_{p,q}^k(S_k) = \{v : (0, L) \times J_k \longrightarrow \mathbb{R}; \quad v(x, t) = \sum_{s=0}^q \psi_s(t) v_{h,s}(x), \quad x \in (0, L), t \in J_k\}.$$

Esse espaço é formado por funções polinomiais de ordem q no tempo (em J_k) e por funções polinomiais por partes de ordem p no espaço (na partição $\mathcal{T}_{hk}$).

Como estamos utilizando funções lineares por partes no espaço, então $p = 1$. No tempo vamos tratar dos casos $q = 0$ e $q = 1$.

Vamos entender o espaço $\mathbb{Q}_{p,q}^k(S_k)$ com calma!

Descrição da formulação

$$\mathbb{Q}_{p,q}^k(S_k) = \{v : (0, L) \times J_k \longrightarrow \mathbb{R}; \quad v(x, t) = \sum_{s=0}^q \psi_s(t) v_{h,s}(x), \quad x \in (0, L), t \in J_k\}.$$

- ▶ As funções $\psi_s(t)$ formam uma base para o espaço $\mathbb{P}_q(J_k)$. Uma possível escolha é a base usual

$$\psi_s(t) = t^s, \quad s = 0, \dots, q,$$

isto é, $\{1, t, t^2, \dots, t^q\}$.

- ▶ A base lagrangeana (ou nodal) para $\mathbb{P}_q(J_k)$ requer a discretização também do intervalo J_k , introduzindo instantes intermediários em cada subintervalo temporal.

Descrição da formulação

Por exemplo, para $q = 1$, a base nodal para $\mathbb{P}_1(J_k)$ é dada por $\{\pi_1(t), \pi_2(t)\}$, onde

$$\begin{aligned}\pi_1(t) &= \frac{t_k - t}{\Delta t_k}, & \implies \pi_1(t_{k-1}) = 1, & \pi_1(t_k) = 0 \\ \pi_2(t) &= \frac{t - t_{k-1}}{\Delta t_k}, & \implies \pi_2(t_{k-1}) = 0, & \pi_2(t_k) = 1.\end{aligned}$$

Neste caso,

$$v(x, t) = \pi_1(t)v_{h,0}(x) + \pi_2(t)v_{h,1}(x).$$

Descrição da formulação

$$\mathbb{Q}_{p,q}^k(S_k) = \{v : (0, L) \times J_k \longrightarrow \mathbb{R}; \quad v(x, t) = \sum_{s=0}^q \psi_s(t) v_{h,s}(x), \quad x \in (0, L), t \in J_k\}.$$

- A função $v_{h,s}(x)$ é uma função polinomial por partes de grau p em cada elemento $K_j^k = [x_{j-1}^k, x_j^k]$ (em nosso caso, $p = 1$), satisfazendo $v_{h,s}(0) = v_{h,s}(L) = 0$. Podemos escrever

$$v_{h,s} = \sum_{r=1}^{n^k-1} V_{sr} \varphi_r(x),$$

onde n^k é o número de elementos em $(0, L)$ no slab S_k e $\varphi_r(x)$, $r = 1, \dots, n^k - 1$ são as funções chapéu.

Descrição da formulação

$$\mathbb{Q}_{p,q}^k(S_k) = \{v : (0, L) \times J_k \longrightarrow \mathbb{R}; \quad v(x, t) = \sum_{s=0}^q \psi_s(t) v_{h,s}(x), \quad x \in (0, L), t \in J_k\}.$$

- Quando $q = 0$ (aproximação constante no tempo em J_k), temos

$$v(x, t) = \psi_0(t) v_{h,0}(x) = v_h(x).$$

Quando $q = 1$ (aproximação linear por partes no tempo em J_k), usando a base nodal, temos

$$v(x, t) = \psi_0(t) v_{h,0}(x) + \psi_1(t) v_{h,1}(x) = \pi_1(t) v_h(x) + \pi_2(t) v_h(x)$$

Descrição da formulação

O espaço (global) de aproximação para o FEM no espaço-tempo sobre o domínio $Q = [0, L] \times [0, T]$ é definido por

$$V_{h,\Delta t} = \mathbb{Q}_{p,q} = \{v : (0, L) \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R} : \quad v|_{S_k} \in \mathbb{Q}_{p,q}^k, \quad k = 1, \dots, m\},$$

- ▶ O número de graus de liberdade do espaço $\mathbb{Q}_{p,q}^k$ é $(q+1)(n^k-1)$.
- ▶ As funções em $V_{h,\Delta t}$ são contínuas e lineares por partes no espaço e são descontínuas e polinomiais de grau q por partes no tempo.

Descrição da formulação

Em geral, as funções em $V_{h,\Delta t}$ são descontínuas no tempo entre os subintervalos J_k e J_{k+1} , exatamente nos pontos t_k , $k = 1, \dots, m-1$. Neste caso temos uma sequência de problemas desacoplados e independentes (um para cada *slab*)

Para que os dados (informações) sejam transmitidas do *slab* S_{k-1} para o *slab* S_k , utilizamos um termo (chamado *penalty*) na interface dos *slabs* S_{k-1} e S_k (no tempo t_{k-1}), que impõe uma **condição de continuidade fraca** na interface dos *slabs*.

Para isso definimos o **salto da função** $v \in V_{h,\Delta t}$ no ponto (temporal) t_k como sendo

$$[v]_k = v_k^+ - v_k^-, \quad (5)$$

onde

$$v_k^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} v(t_k + \delta), \quad v_k^- = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} v(t_k - \delta).$$

Descrição da formulação

As discretizações no espaço-tempo são denominadas pela sigla $cG(p)dG(q)$, onde

- ▶ $cG(p)$ significa **Galekin Contínuo** de ordem p no espaço. No nosso caso, $p = 1$;
- ▶ $dG(q)$ significa **Galekin Descontínuo** de ordem q no espaço. Avaliaremos os casos $q = 0$ e $q = 1$.

Descrição da formulação

A formulação no espaço-tempo cG(1)dG(0) consiste em achar $u \in V_{h,\Delta t}$ tal que $u(x, 0) = u_0(x)$ e

$$\sum_{k=1}^m \left[\int_{J_k} \left(\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx + a(u, v) \right) dt + \int_0^L [u]_{k-1} v_{k-1}^+ dx \right] = \sum_{k=1}^m \int_{J_k} \int_0^L f v dx dt, \quad \forall v \in V_{h,\Delta t}$$

ou para cada *slab* S_n , $n = 1, \dots, m$, achar $u \in \mathbb{Q}_{p,q}^k$ tal que $u(x, 0) = u_0(x)$ e

$$\int_{J_k} \left(\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx + a(u, v) \right) dt + \int_0^L [u]_{k-1} v_{k-1}^+ dx = \int_{J_k} \int_0^L f v dx dt, \quad \forall v \in \mathbb{Q}_{p,q}^k.$$

Descrição da formulação

O termo

$$\int_0^L [u]_{k-1} v_{k-1}^+ dx = \int_0^L (u_{k-1}^+ - u_{k-1}^-) v_{k-1}^+ dx$$

é a condição de salto que impõe uma continuidade fraca na interface dos *slabs*, de forma que as informações sejam propagadas entre os *slabs*.

Galerkin descontínuo por partes no tempo (dG(0)) significa que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ em cada *slab* S_k , $k = 1, \dots, m$. Além disso,

$$\int_{J_k} \left(\underbrace{\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx}_{=0} + a(u, v) \right) dt = \Delta t_k a(u, v).$$

Descrição da formulação

Fazendo

$$u_{k-1}^- = u_{k-1} = u_{h,k-1},$$

$$u_{k-1}^+ = u_k = u_{h,k},$$

$$v_{k-1}^+ = v_k = v_{h,k},$$

então

$$\begin{aligned} \int_0^L [u]_{k-1} v_{k-1}^+ dx &= \int_0^L (u_{k-1}^+ - u_{k-1}^-) v_{k-1}^+ dx \\ &= \int_0^L (u_{h,k} - u_{h,k-1}) v_{h,k} dx \\ &= \int_0^L u_{h,k} v_{h,k} dx - \int_0^L u_{h,k-1} v_{h,k} dx \\ &= (u_{h,k}, v_{h,k}) - (u_{h,k-1}, v_{h,k}) \end{aligned}$$

Descrição da formulação

Se f é uma função constante no tempo então

$$\int_{J_k} \int_0^L f v dx dt = \Delta t_k \int_0^L f v dx = \Delta t_k (f, v).$$

Neste caso, temos o seguinte método:

$$(u_{h,k}, v_{h,k}) + \Delta t_k a(u_{h,k}, v_{h,k}) = \Delta t_k (f, v_{h,k}) + (u_{h,k-1}, v_{h,k})$$

Fazendo $u_{h,k} = \sum_{j=1}^{n^k} \xi_j^k \varphi_j(x)$ e $v_{h,k} = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, n^k$, obtemos o sistema

$$(M + \Delta t_k A) \boldsymbol{\xi}_k = M \boldsymbol{\xi}_{k-1} + \Delta t_k \mathbf{b}_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (6)$$

que é exatamente o *método de Euler-Implicito*.

Descrição da formulação

Se $f = f(x, t)$, isto é f é uma função que varia no tempo, então

$$\int_{J_k} \int_0^L f v dx dt = \int_{J_k} (f, v) dt.$$

$$(u_{h,k}, v_{h,k}) + \Delta t_k a(u_{h,k}, v_{h,k}) = \int_{J_k} (f, v_{h,k}) dt + (u_{h,k-1}, v_{h,k})$$

Fazendo $u_{h,k} = \sum_{j=1}^{n^k} \xi_j^k \varphi_j(x)$ e $v_{h,k} = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, n^k$, obtemos o sistema

$$(M + \Delta t_k A) \boldsymbol{\xi}_k = M \boldsymbol{\xi}_{k-1} + \bar{\mathbf{b}}_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (7)$$

onde $\bar{b}_i = \int_{J_k} (f, \varphi_i) dt$.

Descrição da formulação

O caso $q = 1$ é descrito nas referências bibliográficas [2] e [3].

Bibliografia Básica

1. Mats G. Larson and Fredrik Bengzon. The Finite Element Method: Theory, Implementation and Applications. Springer, 2013.
2. L. Formaggia, F. Saleri and A. Veneziani. Solving numerical PDEs: Problems, Applications, Exercises. Springer, 2012.
3. A. Quarteroni, R. Sacco and F Saleri. Numerical Mathematics. Springer, 2007.