



SEMINÁRIO DE ELEMENTOS FINITOS

Universidade Federal do Espírito Santo - Centro Tecnológico

Modelagem da Equação do Calor

Eng. Vitor P. Pinheiro
Prof. Dr. Isaac Pinheiro

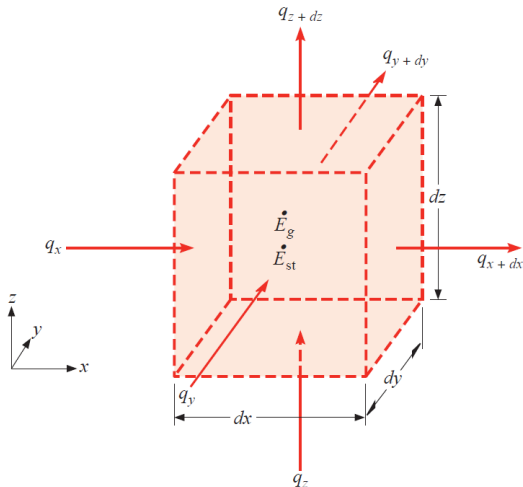
19 de abril de 2018

Estrutura do Seminário

- 1 Dedução da Equação de Difusão de Calor
- 2 Equação de Campo Escalar Generalizada

Balanco de Energia em um Volume de Controle

Inicia-se por uma balanço de energia em um **volume de controle infinitesimal** com volume $dV = dxdydz$.



Algebrização do Balanço Térmico

Um **balanço de energia** em um volume de controle deve considerar as seguintes parcelas:

Algebrização do Balanço Térmico

Um **balanço de energia** em um volume de controle deve considerar as seguintes parcelas:

- ① Entradas e Saídas de Fluxos Energéticos

Algebrização do Balanço Térmico

Um **balanço de energia** em um volume de controle deve considerar as seguintes parcelas:

- ① Entradas e Saídas de Fluxos Energéticos
- ② Geração de Energia no interior do Volume de Controle

Algebrização do Balanço Térmico

Um **balanço de energia** em um volume de controle deve considerar as seguintes parcelas:

- ① Entradas e Saídas de Fluxos Energéticos
- ② Geração de Energia no interior do Volume de Controle
- ③ Acúmulo de Energia no interior do Volume de Controle

Algebrização do Balanço Térmico

Um **balanço de energia** em um volume de controle deve considerar as seguintes parcelas:

- ① Entradas e Saídas de Fluxos Energéticos
- ② Geração de Energia no interior do Volume de Controle
- ③ Acúmulo de Energia no interior do Volume de Controle

Algebricamente, podemos expor o balanço de energia da seguinte forma:

Balanço Térmico no VC

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} \quad (3)$$

Algebrização do Balanço Térmico

Vamos agora detalhar a **estrutura matemática de cada termo** que compõe o balanço térmico.

Algebrização do Balanço Térmico

Vamos agora detalhar a **estrutura matemática de cada termo** que compõe o balanço térmico.

I) Termos de Taxas de Entrada e Saída de Calor:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = q_x + q_y + q_z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} \quad (5)$$

Algebrização do Balanço Térmico

Vamos agora detalhar a **estrutura matemática de cada termo** que compõe o balanço térmico.

I) Termos de Taxas de Entrada e Saída de Calor:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = q_x + q_y + q_z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} \quad (5)$$

II) Termo de Taxa de Geração Volumétrica

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad (6)$$

Algebrização do Balanço Térmico

Vamos agora detalhar a **estrutura matemática de cada termo** que compõe o balanço térmico.

I) Termos de Taxas de Entrada e Saída de Calor:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = q_x + q_y + q_z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} \quad (5)$$

II) Termo de Taxa de Geração Volumétrica

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad (6)$$

III) Termo de Acúmulo de Energia no VC:

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (7)$$

Algebrização do Balanço Térmico

Substituindo tais definições matemáticas no conceito do **balanço de energia**, tem-se:

$$q_x + q_y + q_z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} + \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (8)$$

Algebrização do Balanço Térmico

Substituindo tais definições matemáticas no conceito do **balanço de energia**, tem-se:

$$q_x + q_y + q_z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} + \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (8)$$

A equação constitutiva que modela o fluxo de calor por **mecanismo condutivo** dá-se pela Lei de Fourier Generalizada.

Lei de Fourier - Material Isotrópico

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (9)$$

Algebrização do Balanço Térmico

Substituindo tais definições matemáticas no conceito do **balanço de energia**, tem-se:

$$q_x + q_y + q_z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} + \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (8)$$

A equação constitutiva que modela o fluxo de calor por **mecanismo condutivo** dá-se pela Lei de Fourier Generalizada.

Lei de Fourier - Material Isotrópico

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (9)$$

O **sinal negativo** na expressão constitutiva é um ajuste algébrico simples.

Algebrização do Balanço Térmico

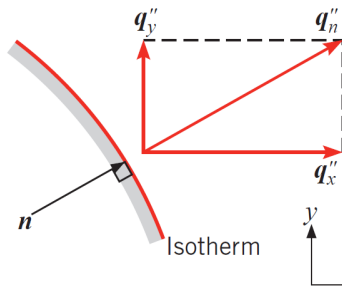
A **componente em cada direção do fluxo de calor**, que são as parcelas que efetivamente entram no balanço podem ser escrita como:

$$q_n = -kA_n \frac{\partial T}{\partial n} \quad \therefore \quad q_x = -kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (10)$$

Algebrização do Balanço Térmico

A **componente em cada direção do fluxo de calor**, que são as parcelas que efetivamente entram no balanço podem ser escrita como:

$$q_n = -kA_n \frac{\partial T}{\partial n} \quad \therefore \quad q_x = -kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (10)$$



Tratamento do Fluxos de Calor de Saída do VC

Os fluxos de saída no volume de controle são contabilizados por uma **expansão em série de Taylor**, truncada apenas em primeira ordem.

Tratamento do Fluxos de Calor de Saída do VC

Os fluxos de saída no volume de controle são contabilizados por uma **expansão em série de Taylor**, truncada apenas em primeira ordem.

I) Direção X:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (11)$$

Tratamento do Fluxos de Calor de Saída do VC

Os fluxos de saída no volume de controle são contabilizados por uma **expansão em série de Taylor**, truncada apenas em primeira ordem.

I) Direção X:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (11)$$

II) Direção Y:

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (12)$$

Tratamento do Fluxos de Calor de Saída do VC

Os fluxos de saída no volume de controle são contabilizados por uma **expansão em série de Taylor**, truncada apenas em primeira ordem.

I) Direção X:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (11)$$

II) Direção Y:

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (12)$$

III) Direção Z:

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (13)$$

Equação de Difusão de Calor

Inserindo o conceito constitutivo da Lei de Fourier no balanço, chega-se a .

Equação da Difusão de Calor

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (14)$$

Equação de Difusão de Calor

Inserindo o conceito constitutivo da Lei de Fourier no balanço, chega-se a .

Equação da Difusão de Calor

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (14)$$

Em notação vetorial compacta a equação acima pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (15)$$

Equação de Difusão de Calor

Inserindo o conceito constitutivo da Lei de Fourier no balanço, chega-se a .

Equação da Difusão de Calor

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (14)$$

Em notação vetorial compacta a equação acima pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (15)$$

Interpretação Física do Operador Divergente

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) = q_n'' - q_{n+dn}'' \quad (16)$$

Tratamento do Tensor Condutividade Térmica

Para observar a característica tensorial da condutividade térmica, no caso da equação do calor, vamos reescreve-la em **notação indicial**.

Tratamento do Tensor Condutividade Térmica

Para observar a característica tensorial da condutividade térmica, no caso da equação do calor, vamos reescreve-la em **notação indicial**.

$$(k_{ij}T_{,j})_{,i} + \dot{q} = \rho c_p \dot{T} \quad (17)$$

Tratamento do Tensor Condutividade Térmica

Para observar a característica tensorial da condutividade térmica, no caso da equação do calor, vamos reescreve-la em **notação indicial**.

$$(k_{ij}T_{,j})_{,i} + \dot{q} = \rho c_p \dot{T} \quad (17)$$

Tensor Condutividade Térmica

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_y & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

Tratamento do Tensor Condutividade Térmica

Para observar a característica tensorial da condutividade térmica, no caso da equação do calor, vamos reescreve-la em **notação indicial**.

$$(k_{ij}T_{,j})_{,i} + \dot{q} = \rho c_p \dot{T} \quad (17)$$

Tensor Condutividade Térmica

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_y & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

Este tensor deve ser adaptado de acordo com a natureza do meio contínuo: **isotrópico, ortotrópico e anisotrópico**.

Hipóteses Simplificadoras

Vamos então **simplificar a equação de calor** encontrada adotando as seguintes hipóteses:

Hipóteses Simplificadoras

Vamos então **simplificar a equação de calor** encontrada adotando as seguintes hipóteses:

- ① Meio Contínuo Isotrópico Homogêneo

Hipóteses Simplificadoras

Vamos então **simplificar a equação de calor** encontrada adotando as seguintes hipóteses:

- ① Meio Contínuo Isotrópico Homogêneo
- ② Condutividade Térmica Não-Dependente da Temperatura

Hipóteses Simplificadoras

Vamos então **simplificar a equação de calor** encontrada adotando as seguintes hipóteses:

- ① Meio Contínuo Isotrópico Homogêneo
- ② Condutividade Térmica Não-Dependente da Temperatura
- ③ Condutividade Térmica Constante em Relação ao Espaço

Equação do Calor Meios Contínuos Homogêneos

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (19)$$

De acordo com a **Teoria de Campo Escalar**, é possível colocar algebricamente um problema generalizado no seguinte formato algébrico.

Equação de Campo Escalar Generalizada

$$\lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \nabla \cdot (k \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \gamma u = f \quad (20)$$

De acordo com a **Teoria de Campo Escalar**, é possível colocar algebricamente um problema generalizado no seguinte formato algébrico.

Equação de Campo Escalar Generalizada

$$\lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \nabla \cdot (k \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \gamma u = f \quad (20)$$

Nesta equação as seguintes definições são válidas:

- k é o Tensor Condutividade Térmica

De acordo com a **Teoria de Campo Escalar**, é possível colocar algebricamente um problema generalizado no seguinte formato algébrico.

Equação de Campo Escalar Generalizada

$$\lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \nabla \cdot (k \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \gamma u = f \quad (20)$$

Nesta equação as seguintes definições são válidas:

- k é o Tensor Condutividade Térmica
- β é o vetor campo de velocidade do escoamento

De acordo com a **Teoria de Campo Escalar**, é possível colocar algebricamente um problema generalizado no seguinte formato algébrico.

Equação de Campo Escalar Generalizada

$$\lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \nabla \cdot (k \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \gamma u = f \quad (20)$$

Nesta equação as seguintes definições são válidas:

- k é o Tensor Condutividade Térmica
- β é o vetor campo de velocidade do escoamento
- $f(X, t)$ é uma função-fonte

De acordo com a **Teoria de Campo Escalar**, é possível colocar algebricamente um problema generalizado no seguinte formato algébrico.

Equação de Campo Escalar Generalizada

$$\lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \nabla \cdot (k \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \gamma u = f \quad (20)$$

Nesta equação as seguintes definições são válidas:

- k é o Tensor Condutividade Térmica
- β é o vetor campo de velocidade do escoamento
- $f(X, t)$ é uma função-fonte
- $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ são constantes escalares