



Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Programa de Pós-Graduação em Informática - PPGI

Prof. Isaac P. Santos

Tópicos Avançados em Elementos Finitos - 2018/1

Lista 6 - (fazer em dupla) entregar dia 06/07/18

1. Mostre que o problema variacional contínuo do problema

Achar $u = u(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} -\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \sigma u &= f, \text{ em } \Omega; \\ u &= 0, \text{ em } \partial\Omega \end{aligned}$$

tem solução única.

2. O que se pode afirmar sobre o problema discretizado através do método de elementos finitos de Galerkin?
3. Considere o problema de valor de contorno que consiste em determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} -\epsilon u''(x) + \beta u'(x) &= 0, \text{ em } \Omega =]0, L[; \\ u(0) &= 0, \text{ e } u(L) = 1, \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$u(x) = \frac{1 - e^{Pe \frac{x}{L}}}{1 - e^{Pe}},$$

onde $Pe = \frac{\beta L}{\epsilon}$ é o número de Peclet (global). Para $L = 1$, $\beta = 1$ e $\epsilon = 0.002$ determine a solução aproximada em 3 malhas uniformes com comprimento característico h tais que o número de Peclet local $\alpha = \frac{\beta h}{2\epsilon}$ seja 0.5, 1 e 5, usando:

- a) o método MEF de Galerkin. Compare graficamente cada solução aproximada com a exata.
- b) o método de Galerkin, modificando o problema original introduzindo a difusão artificial ótima $\tilde{\epsilon} = \frac{\beta h}{2} \xi$, onde ξ é o parâmetro adimensional definido por

$$\xi = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

Comente os resultados.

4. Descreva o método SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*)
5. Mostre que se $a(\cdot, \cdot)$ for uma forma bilinear simétrica que satisfaz as hipóteses do Lema de Lax-Milgram, então $a(\cdot, \cdot)$ define um produto interno em $V = H_0^1(0, L)$. Este produto interno induz a norma da energia

$$\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}.$$

6. Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$|ab| \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$$

7. Mostre que se $a, b, \epsilon \in \mathbb{R}$, então

$$|ab| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2 \right)$$

8. Sejam $u, v \in V$, um espaço com produto interno. Então

$$(u, v) \leq |(u, v)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\|u\|^2}{\epsilon} + \epsilon \|v\|^2 \right)$$

9. Faça um estudo detalhado da Seção 10.1.8 (*Computer Implementation*) do livro texto¹ reproduzindo todos os experimentos numéricos.

10. Faça todos os sete exercícios do Capítulo 10 (página 256) do livro texto¹.

¹Larson, M. G. and Bengzon, F. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Springer, 2013,