



Universidade Federal
do Espírito Santo



lcad
LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO
DE ALTO DESEMPENHO

MEF para Equações de Navier-Stokes Incompressíveis

Parte I

Isaac P. Santos

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

2018/2

Equações de Navier Stokes

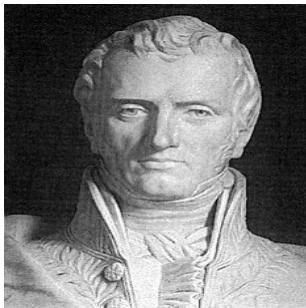
As equações de Navier Stokes incompressíveis são baseadas nas leis de balanço do momentum linear (segunda lei de Newton) e de conservação da massa.

Essas equações governam o problema hidrodinâmico (velocidade $\mathbf{v}$ e pressão p) de um fluido viscoso Newtoniano incompressível e são descritas por

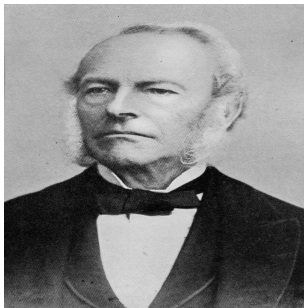
$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

mais uma condição inicial para o campo de velocidade e condições de contorno apropriadas.

Equações de Navier Stokes



(a)



(b)

Figure: Claude Louis Marie Henri **Navier** (esquerda) e George Gabriel **Stokes** (direita).

Conservação da massa

Uma das propriedades mais importantes de um corpo (meio contínuo) é que ele possui *massa*. A massa é uma quantidade de matéria, consistindo de um certo número de moléculas. Ela depende da estrutura molecular e permanece inalterada por influências externas. Consideramos somente corpos cuja massa é distribuída continuamente através do seu volume.

Seja $m_T(\Omega)$ a massa total do corpo (meio contínuo) representado pela região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Assumimos que existe um campo de **massa específica** (*density*) por unidade de volume $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$m_T(\Omega) = \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x}) d\Omega.$$

Conservação da massa

Sejam $\Omega_\delta(\mathbf{x})$ uma bola de raio $\delta > 0$ centrada em $\mathbf{x}$ e $m_T(\Omega_\delta(\mathbf{x}))$ a massa (de material) contida em $\Omega_\delta(\mathbf{x})$.

Esta quantidade perde o sentido físico quando o volume $vol(\Omega_\delta(\mathbf{x}))$ tende ao tamanho do *livre caminho médio das moléculas*. Assim, existe um dado volume crítico associado a bola $\Omega_c(\mathbf{x})$ abaixo do qual esta quantidade perde o sentido no contexto do *continuum*. Isso permite definir a propriedade massa específica (density) da seguinte forma:

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow c} \frac{m_T(\Omega_\delta(\mathbf{x}))}{vol(\Omega_\delta(\mathbf{x}))}.$$

Nossa hipótese básica sobre a distribuição de massa em um meio contínuo é que este limite existe e é positivo em cada $\mathbf{x} \in \Omega$.

Conservação da massa

Como é de conhecimento geral, a massa de um dado sistema não pode ser criada ou destruída. Por exemplo, o fluxo de massa de sangue que entra por uma seção de uma artéria é igual ao fluxo de massa de sangue que sai da artéria, desde que sangue não é adicionado ou perdido pelas paredes da artéria. Dessa forma, a massa de sangue é conservada mesmo quando as seções transversais da artéria mudam ao longo do comprimento da artéria.

O princípio de conservação de massa afirma que a massa total de qualquer parte de um corpo (meio contínuo) não muda durante o seu movimento. A equação resultante do princípio de conservação de massa é conhecida como *equação da continuidade*.

Conservação da massa

Vamos deduzir a equação de conservação da massa usando a configuração Euleriana (espacial), considerando uma região fixa (não varia no tempo).

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ uma região fixa ocupada por um fluido. A massa total de fluido em W é denotada por

$$m_T(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

onde $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a massa específica (massa por unidade de volume).

A taxa de variação da massa em W é dada por

$$\frac{d}{dt} m_T(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_W \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x}. \quad (1)$$

A última passagem é válida porque W é fixo (não varia com o tempo t).

Conservação da massa

Na ausência de fontes ou sorvedouros de massa, o princípio de conservação da massa pode ser enunciado como

$$\left[\begin{array}{c} \text{Variação temporal} \\ \text{ou taxa de acúmulo de massa} \\ \text{em } W \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Fluxo líquido} \\ \text{de massa que atravessa} \\ \text{a fronteira de } W \end{array} \right],$$

que matematicamente se escreve da forma

$$\frac{d}{dt}m_T(W, t) = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2)$$

onde $\mathbf{v}$ é o campo de velocidade e $\mathbf{n}$ é o vetor unitário externo a fronteira de W .

Conservação da massa

Vamos usar o teorema da divergência para campos vetoriais no termo do lado direito da última equação:

$$\int_{\partial W} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_W \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\mathbf{x}.$$

Usando (1) e o teorema da divergência em (2), obtemos o princípio de conservação da massa na *forma integral*, dado por

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x} = 0. \quad (3)$$

A equação de conservação da massa na *forma diferencial* (ou *pontual*) segue do Lema de Dubois-Raymond:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4)$$

Essa equação é conhecida como equação da continuidade.

Conservação de massa

A equação de conservação da massa na forma diferencial é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

- ▶ O primeiro termo representa a variação temporal da densidade de fluido;
- ▶ O segundo termo descreve a taxa de variação da massa por unidade de volume.

A equação de conservação da massa pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} = 0.$$

Em *notação indicial*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0.$$

Meio Contínuo Incompressível

Proposição

Sejam $\mathbf{v}$ é um campo vetorial e q um campo escalar de classe C^1 , então

$$\operatorname{div}(q\mathbf{v}) = q\operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla q.$$

Usando a proposição acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right)}_{\text{derivada material de } \rho} + \rho\operatorname{div}(\mathbf{v}) \\ &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Meio Contínuo Incompressível

Isso significa que a equação de conservação da massa pode ser escrita como

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\operatorname{div}(\mathbf{v}). \quad (5)$$

A equação (5) diz que a lei de conservação da massa pode ser interpretada como a relação entre a taxa de variação da densidade ao longo das trajetórias do fluido (representada pela derivada material $\frac{D\rho}{Dt}$), com respeito à taxa de expansão local (dada por $\operatorname{div}(\mathbf{v})$).

Quando $\operatorname{div}(\mathbf{v}) < 0$, temos uma compressão local, situação em que a massa específica aumenta. Quando $\operatorname{div}(\mathbf{v}) > 0$ temos uma expansão local, situação em que a massa específica diminui.

Meio Contínuo Incompressível

Definição (meio contínuo incompressível)

Um meio contínuo é incompressível se sua massa específica em cada ponto material for constante (ρ é constante sobre a trajetória do meio), ou seja,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

que implica (usando a Eq. (5)) em $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$.

Então, a equação de conservação da massa, na configuração Euleriana, para meios incompressíveis é dada por

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$$

ou (usando outra notação para o operador divergência)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Balanço do momentum linear

As equações do balanço do momentum linear são obtidas pela aplicação da segunda lei de Newton. A segunda lei de Newton aplicada a uma partícula de massa m , velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\mathbf{a}$ é dada por

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \quad (6)$$

onde $\mathbf{F}$ é a força agindo sobre a partícula e $\frac{dm}{dt} = 0$, isto é, a massa é constante no tempo.

O **momentum linear** $\mathbf{p}$ (quantidade de movimento ou quantidade de matéria em movimento) da partícula é dada por sua massa vezes sua velocidade, isto é, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Dessa forma, a segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, pode ser reescrita como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (7)$$

Balanço do momentum linear

Esta equação, formulada por Euler, diz que a **taxa de variação do momentum linear de uma partícula é igual a soma das forças que agem sobre ela**. Esse é o princípio do momentum linear, ou balanço do momentum linear. Se não existem forças aplicadas à partícula, o momentum linear será constante e a lei neste caso é conhecida como lei de conservação do momentum linear.

Queremos generalizar o princípio do momentum linear para um meio contínuo. Iniciaremos pelo estudo das forças que agem em um meio contínuo. Dividiremos as forças em duas classes: **forças de corpo** e **forças de superfícies**.

Forças de Corpo

As forças de corpo, denotada por $\mathbf{F}_B$, agem à distância, como por exemplo, gravidade, eletromagnetismo, etc. Se $\mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t)$ denota o campo de forças de corpo por unidade de volume, então

$$\mathbf{F}_B = \int_{\Omega} \mathbf{f}_V d\Omega. \quad (8)$$

Se $\mathbf{f}_M(\mathbf{x}, t)$ denota o campo de forças de corpo por unidade de massa, então

$$\mathbf{F}_B = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_M d\Omega. \quad (9)$$

Forças de Corpo

Quando a única força de corpo considerada é a força gravitacional (força por unidade de massa), então

$$\mathbf{F}_B = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} d\Omega, \quad (10)$$

onde

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix},$$

com $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ sendo a aceleração devido a gravidade na superfície da terra.

Forças de Superfície ou de Contato

As forças de superfície ou de contato, denotada por $\mathbf{F}_S$, agem por contato, como por exemplo, pressão, forças cisalhantes, etc. Pelo *axioma de Cauchy*¹, existe um *vetor tração*

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}),$$

que fornece a força de contato por unidade de área, atuando em uma superfície perpendicular ao vetor unitário $\mathbf{n}$ no ponto $\mathbf{x}$ e no instante de tempo t . A força que age na superfície S da porção do meio contínuo que ocupa a região Ω é

$$\mathbf{F}_S = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS.$$

¹Augustin-Louis Cauchy (Paris, 21 de agosto de 1789 - Paris, 23 de maio de 1857) foi um matemático francês.

Forças de Superfície ou de Contato

Pelo *teorema de Cauchy* existe um campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}$, chamado **tensor das tensões** ou **tensor de Cauchy**, dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

tal que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}.$$

Portanto, o campo de forças de superfície é dado por

$$\mathbf{F}_S = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} dS.$$

Forças de Corpo e de Superfície

Usando o Teorema da divergência de Gauss para tensores, obtemos a seguinte expressão para as forças de superfície (ou de contato),

$$\mathbf{F}_S = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) d\Omega. \quad (11)$$

Considerando as forças de corpo e de superfícies dadas em (10) e (11), respectivamente, o campo total de forças que agem em Ω é dado por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\Omega} \left(\rho \mathbf{f}_M + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) d\Omega. \quad (12)$$

Note que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)^T.$$

Balanço do momentum linear

Todo corpo que possui uma massa m e uma velocidade $\mathbf{v}$ possui momentum linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. O momentum linear é uma grandeza vetorial, de mesma direção e sentido da velocidade. Não leva em consideração as rotações das partículas.

O princípio de balanço do momentum linear diz que

$$\left[\begin{array}{c} \text{A taxa de variação} \\ \text{temporal do momentum} \\ \text{de um meio contínuo} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Resultante das forças} \\ \text{que agem} \\ \text{sobre o meio contínuo} \end{array} \right].$$

Matematicamente esse princípio é descrito por

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F},$$

já definido anteriormente.

Balanço do momentum linear

Vimos que o campo de forças é dado por (12). Vamos agora descrever o momentum linear total do meio contínuo descrito por Ω . Considerando a descrição Euleriana, o momentum linear é dado por

$$\mathbf{L}(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (13)$$

O princípio do momentum linear diz que

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t). \quad (14)$$

Balanço do momentum linear

Recorrendo ao Teorema do Transporte de Reynolds, temos

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_t} (\rho \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds.$$

Lembrando o produto tensorial de 2 vetores: $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$. Então

$$(\rho \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{v} = (\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v})\mathbf{n}.$$

Portanto,

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_t} (\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v})\mathbf{n} ds,$$

onde $(\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v})$ é um tensor de segunda ordem.

Balanço do momentum linear

Usando o Teorema da Divergência para tensores, obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) d\mathbf{x},$$

ou

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x}. \quad (15)$$

Usando (14) e (12) obtemos a primeira descrição integral do balanço de momentum linear,

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) d\mathbf{x}. \quad (16)$$

Balanço do momentum linear

A equação (16) resulta em

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] d\mathbf{x} = 0. \quad (17)$$

Usando o Lemma de Dubois-Raymond, obtemos a equação diferencial (na configuração Euleriana) do balanço de momentum linear,

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{f}. \quad (18)$$

Balanço do momentum linear

Relembrando a propriedade: se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são campos vetoriais, então

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{u} \operatorname{div}(\mathbf{w}) + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{w}.$$

Usando essa propriedade, a equação (18) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{f}.$$

Aplicando a regra do produto (de derivadas) no primeiro termo,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{f}.$$

Obs: $(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$.

Balanço do momentum linear

Agrupando termos,

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] \mathbf{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{f}. \quad (19)$$

- ▶ O termo $\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]$ é uma aceleração (derivada material de $\mathbf{v}$)
- ▶ O termo $\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right]$ é uma parte da expressão da equação do balanço de massa. Se a massa se conserva, então

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Considerando a conservação da massa, o balanço do momentum linear (na configuração Euleriana) é dado por

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{f}. \quad (20)$$

Equações constitutivas: tensor de Cauchy

Fluidos Perfeitos: são fluidos sem viscosidade (a viscosidade é desprezada), por exemplo, gases e ar em baixa velocidade. Para um fluido perfeito, temos a seguinte equação constitutiva para o tensor de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}, \quad (21)$$

onde p é a pressão (força normal à superfície) e $\mathbf{I}$ é o tensor identidade. Neste caso, não há forças cisalhantes, isto é, $\tau_{ij} = 0$, para $i, j = 1, 2, 3$, e as forças normais são todas iguais a $-p$:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}.$$

Equações constitutivas: tensor de Cauchy

Então, para um fluido perfeito, as forças de superfícies são descritas pelo termo

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (-p\mathbf{I}) = -p\nabla \cdot (\mathbf{I}) - \mathbf{I}\nabla p = -\nabla p.$$

As equações de balanço do momentum linear para fluido perfeito juntamente com a equação de conservação de massa forma uma sistema de equações diferenciais parciais chamada sistema de **equações de Euler**. Esse sistema é completado com a equação de conservação de energia.

Considerando escoamento incompressível e conservação de massa, o sistema de EDPs que governam o movimento de um *fluido perfeito incompressível* (**equações de Euler incompressíveis**):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (23)$$

Equações constitutivas: tensor de Cauchy

Esse sistema de EDPs podem ser reescritas da forma

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

As incógnitas desse problemas são o campo de velocidade $\mathbf{v}$ e a pressão p . Obviamente, para termos um modelo matemático onde possamos avaliar existência e unicidade de solução, devemos incorporar as condições inicial e de contorno a esse modelo.

Equações constitutivas: tensor de Cauchy

Fluidos viscosos: ao contrário dos gases, que são considerados fluidos perfeitos (sem viscosidade), o líquido é governado por tensões de cisalhamento devido ao efeito da viscosidade. A *viscosidade* mede a capacidade que um fluido tem de transmitir tensões de cisalhamento para as camadas vizinhas. Um exemplo de fluido viscoso é o óleo.

Vamos considerar que a viscosidade do fluido não é desprezível. Neste caso, a lei constitutiva para o tensor de Cauchy é descrita por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{visc},$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{visc}$ é um tensor associado às tensões cisalhantes (obtido empiricamente).

Equações constitutivas: tensor de Cauchy

Para gerar tensões de cisalhamento as partículas sofrem distorções. Para fluidos Newtonianos, o tensor σ_{visc} é uma função linear em termos do tensor taxa de deformação (parte simétrica de $\nabla \mathbf{v}$),

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right),$$

isto é, $\sigma_{visc} = f(\epsilon)$. Neste caso, a equação constitutiva para o tensor de Cauchy é dado por

$$\sigma_{visc} = 2\mu\epsilon + \lambda tr(\epsilon)\mathbf{I},$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido e λ é chamada de segundo coeficiente de viscosidade, $\mathbf{I}$ é o tensor (de segunda ordem) identidade e $tr(\epsilon) = \nabla \cdot \mathbf{v}$. Em notação indicial,

$$(\sigma_{visc})_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \epsilon_{ij},$$

$$\text{onde } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Equações constitutivas: tensor de Cauchy

Como exemplo de fluido Newtoniano, citamos a água, o óleo e sangue em vasos largos e como exemplo de fluido não Newtoniano, destacamos a pasta de dente, mel e polímeros.

Se o fluido é incompressível, então $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e a lei constitutiva para o tensor de Cauchy é dada então por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon},$$

conhecida como *lei de Stokes*. No caso bidimensional, temos $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Equações constitutivas: tensor de Cauchy

Então, para um fluido viscoso (Newtoniano incompressível), as forças de superfícies são descritas pelo termo

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}) \\
 &= \nabla \cdot (-p\mathbf{I}) + \nabla \cdot (2\mu\boldsymbol{\epsilon}) \\
 &= -p\nabla \cdot (\mathbf{I}) - \mathbf{I}\nabla p + 2\mu\nabla \cdot (\boldsymbol{\epsilon}) \\
 &= -\nabla p + 2\mu\nabla \cdot (\boldsymbol{\epsilon}).
 \end{aligned}$$

Neste caso, a equação de balanço do momentum linear é

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - 2\mu\nabla \cdot (\boldsymbol{\epsilon}) + \nabla p = \rho \mathbf{f}. \quad (24)$$

Equações constitutivas: tensor de Cauchy

O termo $\nabla \cdot (\epsilon)$ pode ser simplificado:

$$\nabla \cdot (\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) \right].$$

Mas

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \Delta \mathbf{v}.$$

Para escoamento incompressível ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$),

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Portanto $\nabla \cdot (\epsilon) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}$ e

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}. \quad (25)$$

Equações de Navier-Stokes incompressíveis

As equações de balanço do momentum linear para fluido viscoso Newtoniano incompressível juntamente com a equação de conservação de massa forma um sistema de equações diferenciais parciais chamada sistema de **equações de Navier-Stokes incompressíveis**. Essas equações governam o problema hidrodinâmico (velocidade e pressão) de um fluido viscoso Newtoniano incompressível e são descritas por

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (27)$$

Note que se a viscosidade $\mu = 0$ obtemos as equações de Euler. Para formar um modelo matemático, devemos descrever as condições de contorno e inicial.

Equações de Navier-Stokes incompressíveis

Essas equações são impossíveis de serem resolvidas analiticamente, exceto em casos muito especiais. Existem algumas propriedades matemáticas que ainda não foram respondidas pela comunidade científica para essas equações no caso tridimensional.

O *Clay Mathematics Institute* (<http://www.claymath.org/>) oferece (desde maio de 2010) um prêmio de um milhão de dólares para quem resolver algumas questões referentes às equações de Navier-Stokes incompressíveis no caso 3D.

Condição inicial

Para o problema transiente é necessário uma condição inicial para o campo de velocidade, isto é,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \text{em } \Omega.$$

Se o escoamento é incompressível então a condição inicial deve satisfazer a condição de incompressibilidade, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad \text{em } \Omega.$$

Nenhuma condição inicial é prescrita para a pressão, pois não aparece derivada temporal da pressão nas equações.

Condições de contorno

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$. Particionamos a fronteira Γ da seguinte forma

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad \text{com } \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset,$$

onde Γ_D é a parte da fronteira associada às condições de Dirichlet e Γ_N é a parte da fronteira associada às condições de Neumann.

Condições de contorno de Dirichlet para velocidade

Essas condições de contorno são aplicadas em fluidos viscosos (equações de Navier-Stokes). Neste caso, a velocidade $\mathbf{v}$ é prescrita na fronteira Γ_D .

Suponha que a velocidade da fronteira Γ_D seja $\mathbf{v}_D$. Então,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_D, \text{ em } \Gamma_D \times I,$$

onde $\mathbf{v}_D$ é a velocidade da fronteira Γ_D .

Se a fronteira é estacionária (fixa), então $\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$.

Essa condição de contorno é chamada de *condição de não deslizamento* ou *condição de aderência*. Fluidos viscosos não deslizam (escorregam) em contato com a fronteira. O fluido se adere na parede (fronteira Γ_D).

Condições de contorno para tração

Essa é uma condição de Neumann. Em Γ_N é prescrito o vetor tração

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_N, \text{ em } \Gamma_N \times I.$$

Para fluidos que obedecem a lei de Stokes, $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}$,

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_N, \text{ em } \Gamma_N \times I.$$

Condições de impenetrabilidade

Essa condição de contorno é aplicada em fluidos não viscosos (invíscidos), modelados pelas equações de Euler. Nessa condição de contorno, a fronteira é constituída por paredes impermeáveis (o fluido não atravessa a fronteira).

Suponha que a velocidade da fronteira impermeável Γ_N seja $\mathbf{v}_f$. A condição de impenetrabilidade diz que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}.$$

Se a fronteira impermeável Γ_N é estacionária (fixa), isto é, $\mathbf{v}_f = \mathbf{0}$, então

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ em } \Gamma_N \times I.$$

Essa condição exprime o fato que o fluido não cruza a fronteira embora possa ter velocidade tangencial à fronteira.

Observação 1

Quando condições de contorno de Dirichlet são impostas em toda fronteira Γ , então $\Gamma_N = \emptyset$ e a pressão aparece no modelo matemático somente através do gradiente (isto é, ∇p). Dessa forma $p + c$ satisfaz o modelo matemático para qualquer constante c . De fato,

$$\nabla(p + c) = \nabla p + \nabla c = \nabla p.$$

Para obtermos unicidade da pressão é usual escolher o campo de pressão com média nula em Ω , isto é, p deve satisfazer

$$\int_{\Omega} p d\mathbf{x} = 0.$$

Outra forma de obter unicidade da pressão é prescrever a pressão em um ponto do domínio.

Observação 2

No caso de escoamentos altamente viscosos, de forma que os termos convectivos nas equações de Navier-Stokes sejam desprezíveis (em relação aos termos viscosos), as equações resultantes são conhecidas como **equações de Stokes**. O problema de Stokes para escoamento newtoniano e incompressível é dada por

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (29)$$

Modelo Matemático

O modelo matemático composto pelas equações de Navier-Stokes incompressíveis é dado por: determinar $\{\mathbf{v}, p\}$ tal que

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} = \rho \mathbf{f}; \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times I; \quad (30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times I; \quad (31)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t); \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_D \times I; \quad (32)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t); \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_N \times I; \quad (33)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}); \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (34)$$

onde $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ é a condição inicial, $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ são funções dadas, satisfazendo as condições de contorno de Dirichlet (32) e Neumann (33), respectivamente.

Equações de Navier-Stokes incompressíveis

Dividindo a equação

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{f}$$

por $\rho > 0$, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (35)$$

onde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática do fluido, p é a pressão cinemática (pressão dividido pela massa específica ρ).

Em geral, o termo referente ao balanço de momentum linear das equações de Navier-Stokes incompressíveis aparecem no formato da equação (35).

Equações de Navier-Stokes Adimensional

A forma adimensional das equações de Navier-Stokes são obtidas substituindo a viscosidade cinemática ν (ver equação (35)) por $\frac{1}{Re}$, onde

$$Re = \frac{VL}{\nu}$$

é o número de Reynolds, com V sendo a velocidade característica e L o comprimento característico do escoamento. O número de Reynolds mede a razão entre as forças inerciais e forças viscosas do escoamento. Na verdade, a expressão $\nu = 1/Re$ é um abuso de notação, pois as variáveis nas equações dimensional e adimensional são diferentes.

As equações de Navier-Stokes incompressíveis na forma adimensional são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- ▶ Santos, I. P. Introdução a Modelagem Matemática - Notas de Aulas. UFES, 2018.
- ▶ Volker J. Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems. Springer, 2016.
- ▶ Jean Donea and Antonio Huerta. Finite Element Methods for Flow Problems. John Wiley & Sons, 2003.
- ▶ A. Chorin and J.E. Marsden. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer, 1999.
- ▶ Regina C. C. de Almeida. Modelagem Computacional. I Semana de Matemática, UFES, São Mateus, 2004.
- ▶ José Pontes, N. Mangiavacchi. Fenômenos de Transferência com aplicações às ciências físicas e à engenharia: Fundamentos. Coleção Matemática Aplicada, SBM, 2016.