



Universidade Federal
do Espírito Santo



lcad
LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO
DE ALTO DESEMPENHO

MEF para Equações de Navier-Stokes Incompressíveis: Formulação Variacional

Isaac P. Santos

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

2018/2

Equações de Navier-Stokes Incompressíveis

As equações de Navier-Stokes incompressíveis descrevem o escoamento de um fluido, com massa específica constante, em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (com $d = 2, 3$). Elas são escritas como segue

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\nu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right] + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0. \quad (2)$$

onde $\mathbf{u}$ é o campo de velocidades, p é a pressão dividida pela massa específica ρ , $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática, ν é a viscosidade dinâmica, e $\mathbf{f}$ é um termo de força por unidade de massa.

A equação (1) descreve o balanço de momentum linear e a equação (2) é a conservação da massa, também conhecida como equação da continuidade.

O termo não linear $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ descreve o processo de transporte convectivo;

O termo $-\nabla \cdot \left[\nu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right]$ descreve o processo de difusão molecular;

Quando ν é constante, temos

$$\nabla \cdot \left[\nu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right] = \nu(\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) = \nu \Delta \mathbf{u},$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Neste caso, o problema (1)-(2) pode ser reescrito na forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0. \quad (4)$$

Fluidos satisfazendo a *condição de incompressibilidade* $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ são chamados de fluidos incompressíveis. Fluidos com massa específica ρ constante necessariamente satisfaz essa condição, mas existem fluidos incompressíveis com massa específica variável (fluidos estratificados). Ver com cuidado a definição de incompressibilidade dada na aula anterior (ver material Dedução das Equações de Navier-Stokes)

Para o problema (3)-(4) ser bem-posto (ou bem-colocado) devemos impor ao modelo condições de contorno e inicial:

Condição inicial:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5)$$

onde $\mathbf{u}_0$ satisfaz a condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$.

Condições de contorno: Podemos destacar as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), & \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_D \times \mathbb{R}^+, \\ \left(\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p \mathbf{n} \right)(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t), & \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_N \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (6)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ são funções vetoriais dadas, enquanto Γ_D e Γ_N são as fronteiras de Dirichlet e Neumann, respectivamente, e $\mathbf{n}$ é o campo de vetores unitários normais à fronteira Γ .

Para as equações (1)-(2) a segunda equação em (6) é substituída por

$$\left[\frac{1}{2} \nu (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} \right](\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_N \times \mathbb{R}^+$$

Veja outras condições de contorno no livro do Volker John¹.

¹Volker J. Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems. Springer, 2016.

No caso bidimensional, as equações de Navier-Stokes com as condições inicial e de contorno descritas anteriormente resultam em um modelo matemático bem-posto. Isso significa que se todos os dados (condição inicial, condições de contorno e termo de força) forem suficientemente suaves, então a solução é contínua, junto com suas derivadas (parciais), e não desenvolve singularidades no tempo.

O caso tridimensional é diferente: existência e unicidade de soluções clássicas têm sido provados somente para intervalos de tempo suficientemente pequenos.

No caso 3D, foi provado a existência de solução global no sentido fraco no tempo. Mas a questão da unicidade ainda é um problema em aberto.

Observação

As equações de Navier-Stokes têm sido descritas em termos das *variáveis primitivas* $\mathbf{u}$ e p . Pode-se utilizar outros tipos de variáveis, por exemplo, a vorticidade ω e a função de corrente ψ , que são associadas com a velocidade $\mathbf{u}$ através das equações

$$\omega = \text{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

e

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

As várias formulações obtidas são equivalentes do ponto de vista matemático. Contudo, elas são tratadas por diferentes métodos numéricos.

Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

Para obter a formulação variacional (ou fraca) do problema (3)-(4), multiplica-se² a equação (3) (referente ao balanço de momentum linear) por uma função teste v , pertencente a um espaço de Sobolev V que será especificado mais tarde, e integra o resultado sobre o domínio Ω , obtendo

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega,$$

ou

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega. \quad (7)$$

²Como a equação é vetorial, na verdade calcula-se o produto interno com v

Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

Usando as fórmulas de Green:

$$-\int_{\Omega} \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \mathbf{v} dS;$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Segue que a Equação (7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} (\nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \tag{8}$$

Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

E a equação (3) (equação de conservação de massa)? Multiplicamos ela por uma função teste q pertencente a um espaço Q , que será apresentado a seguir, integramos em Ω para obtermos

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0, \quad \forall q \in Q. \quad (9)$$

O espaço V (espaço das funções teste) é definido por

$$V = [H_{\Gamma_D}^1(\Omega)]^d = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d; \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}. \quad (10)$$

As funções do espaço V se anulam na fronteira de Dirichlet Γ_D .

Se $\Gamma = \Gamma_D$, então

$$V = [H_0^1(\Omega)]^d,$$

onde $d = 2, 3$. Além disso, para $t > 0$, $\mathbf{u}(t) \in [H^1(\Omega)]^d$, com $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ em Γ_D , $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ e $p(t) \in Q$.

Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

Se $\Gamma_N \neq \emptyset$ (existe condições de contorno de Neumann), escolhemos para Q o espaço $L^2(\Omega)$, isto é,

$$Q = L^2(\Omega).$$

Se $\Gamma_N = \emptyset$, ou seja, $\Gamma = \Gamma_D$, a escolha para Q será diferente. Como apenas o gradiente de pressão p aparece nas equações de Navier-Stokes, se o par $(\mathbf{u}, p)$ for solução, então para toda constante c o par $(\mathbf{u}, p + c)$ também será solução, uma vez que

$$\nabla(p + c) = \nabla p.$$

Para evitar essa indeterminação única de p , exigimos que o campo de pressão tenha média nula em Ω , isto é

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0.$$

Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

Para isso, basta considerar a pressão pertencente ao seguinte espaço,

$$Q = L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} p d\Omega = 0\}.$$

Em geral, o que é feito na prática (em termos de implementação computacional, onde a pressão é representada por uma função contínua) é prescrever a pressão em um certo ponto $x_0 \in \bar{\Omega}$, ou seja,

$$p(x_0) = p_0.$$

Resumindo, o espaço funcional para o campo de pressão é dada por

$$Q = \begin{cases} L^2(\Omega), & \text{se } \Gamma_N \neq \emptyset; \\ L_0^2(\Omega), & \text{se } \Gamma_N = \emptyset. \end{cases} \quad (11)$$

Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

Quando $\Gamma = \Gamma_D$, as condições de contorno de Dirichlet devem ser compatíveis com a restrição de incompressibilidade:

$$\int_{\Gamma} \varphi \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{u} d\Omega = 0.$$

Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

Portanto, a formulação variacional ou fraca do problema formado pelas equações (3), (4), (5) e (6) é dada por:

Achar $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^+; [H^1(\Omega)]^d) \cap C^0(\mathbb{R}^+; [L^2(\Omega)]^d)$ e $p \in L^2(\mathbb{R}^+; Q)$, tais que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (12)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{v} dS, \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0, \quad \forall q \in Q, \quad (13)$$

com $\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \boldsymbol{\varphi}_D$ e $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$.

Formulação Variacional das Equações de Navier-Stokes

Os espaços V e Q são descritos em (10) e (11), respectivamente.

Os espaços de funções dependentes do tempo são definidos como

$$L^q(I; W) = \{w : I \longrightarrow W; \int_I \|w(t)\|_W^q dt < \infty\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^+; [H^1(\Omega)]^d) &= \{\mathbf{u} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [H^1(\Omega)]^d; \int_{\mathbb{R}^+} \|\mathbf{u}\|_{[H^1(\Omega)]^d}^2 dt < \infty\}; \\ L^2(\mathbb{R}^+; Q) &= \{p : \mathbb{R}^+ \longrightarrow Q; \int_{\mathbb{R}^+} \|p\|_Q^2 dt < \infty\}. \end{aligned}$$

Para todo $t > 0$ usamos a notação $w(t)$ para indicar a função:

$$w(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(t)(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Vamos definir o número de Reynolds

$$Re = \frac{|U|L}{\nu},$$

onde L é um comprimento representativo (comprimento característico) do domínio Ω e U é uma velocidade representativa do fluido (velocidade característica);

O número de Reynolds mede a relação entre convecção e difusão (viscosidade).

Quando $Re \ll 1$ o termo convectivo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ pode ser omitido, caso em que as equações de Navier-Stokes se reduzem as conhecidas equações de Stokes.

Quando o número de Reynolds Re é grande podem ocorrer problemas associados à unicidade de solução, existência de soluções estacionárias estáveis, transição à turbulência, etc.

A formulação variacional das equações de Navier-Stokes pode ser reescrita em uma forma reduzida, somente na variável $\mathbf{v}$, eliminando o campo de pressão p . Para isso, basta introduzimos os seguintes subespaços de $[H^1(\Omega)]^d$:

$$V_{div} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}, \quad V_{div}^0 = \{\mathbf{v} \in V_{div}; \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_D\}.$$

Assim, se considerarmos a formulação variacional (12) - (13) em tais subespaços, isto é, tomando a função teste $\mathbf{v} \in V_{div}$, o termo que contém a pressão se anula e consequentemente o problema se torna:

Achar $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^+; V_{div}) \cap C^0(\mathbb{R}^+; [L^2(\Omega)]^d)$, tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{v} dS, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{div}^0, \end{aligned} \tag{14}$$

com $\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \boldsymbol{\varphi}_D$ e $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$.

Note que se u é solução do problema variacional (12)-(13), também será solução para o problema variacional reduzido (14). Por outro lado, a existência e unicidade de uma função p de modo que a recíproca seja válida, decorre do seguinte teorema:

Teorema

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio com fronteira Γ Lipschitz contínua e u uma solução para o problema variacional reduzido (14). Então existe uma única função $p \in L^2(\mathbb{R}^+; Q)$, de modo que o par (u, p) seja uma solução do problema variacional (12)-(13).

Como o teorema não fornece uma maneira de se obter p através do problema (14), uma aproximação para o par (u, p) geralmente é obtida diretamente de (12)-(13).

Um caso particular das equações de Navier-Stokes é quando o termo convectivo é desprezível, obtendo dessa forma, a chamada equação de Stokes, utilizada para simulação de escoamentos lentos. A seguir abordaremos o problema de Stokes.

Referências Bibliográficas

- ▶ A. Quarteroni. Numerical Models for Differential Problems. Springer, 2009.
- ▶ Volker J. Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems. Springer, 2016.
- ▶ Jean Donea and Antonio Huerta. Finite Element Methods for Flow Problems. John Wiley & Sons, 2003.
- ▶ Rodrigues, B. J. Introdução à solução numérica de problemas transientes via método de elementos finitos. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), Curso de Matemática Industrial. UFES, 2016.