



Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Programa de Pós-Graduação em Informática - PPGI

Prof. Isaac P. Santos

MEF para Navier-Stokes - 2018/2

Lista 2 - entregar dia 14/09/18

1. Considere o problema de Stokes estacionário:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ em } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}_D, \text{ em } \Gamma_D = \Gamma, \quad (3)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}_D$ é uma função dada em $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$ (ver rodapé ¹) e Ω é um aberto limitado com fronteira Γ .

a) Mostre que a função $\boldsymbol{\varphi}_D$ deve satisfazer a condição de compatibilidade

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}_D \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

onde $\mathbf{n}$ é o campo vetorial (unitário) normal à fronteira Γ .

b) Escreva a formulação variacional do problema identificando os espaços de funções.

c) Considere $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\varphi}_D = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ com

$$\varphi_1 = \begin{cases} 0, & \text{para } y = 0, \quad y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y - y^2, & \text{para } x = 0, \quad x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

e $\varphi_2 = 0$. Verifique que $\int_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}_D \cdot \boldsymbol{\eta} ds = 0$. Determine uma solução (analítica) da forma $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, com $u_2 = 0$.

d) Escreva a formulação numérica do problema com elementos finitos $\mathbb{P}_2$ para velocidade e $\mathbb{P}_1$ para a pressão. Comente sobre esse par de espaços.

e) Escreva um código em **Freefem++** e resolva o problema (com os dados do item (c)) para $h = 0.05, 0.025, 0.0125$, $\nu = 0.1$. Determine os erros na norma de $L^2(\Omega)$ para cada h . Estude as taxas de convergência ² da velocidade na norma de $L^2(\Omega)$. Use o solver GMRES com tolerância $eps = 1.e - 9$.

¹ $H^{1/2}(\Gamma)$ é o subespaço de $L^2(\Gamma)$ formado pelas restrições em Γ de funções definidas em $H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, isto é, se $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ então $v|_{\Gamma} = \boldsymbol{\varphi}_D \in H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$.

²Plote o gráfico do erro *versus* h na escala log-log e determine a inclinação da reta.