Física Experimental I

Prof. José Rafael Cápua Proveti

Apresentação

- O laboratório ➔ oportunidade única de validar as teorias físicas de uma maneira quantitativa num experimento real.
  - A experiência ⟶ as limitações ⟶ situações reais.
  - Minimizar os erros. Realizar medidas experimentais cuidadosas.

Cronograma

Semana 1: Apresentação do curso, revisão da teoria da medida e dos erros;

Semana 2: Revisão de gráficos e informações sobre como fazer gráficos no computador;

Semana 3: Experimentos;

Semana 4: Experimentos;

Semana 5: Experimentos;

Semana 6: Experimentos;

Semana 7: Semana de Reposição de Experimentos;

Semana 8: Primeira prova;

Semana 9: Experimentos;

Semana 10: Experimentos;

Semana 11: Experimentos;

Semana 12: Experimentos;

Semana 13: Semana de Reposição de Experimentos;

Semana 14: Segunda prova;

Semana 15: Prova final.

Desenvolvimento do curso

As duas primeiras aulas estão reservadas para uma revisão da teoria dos erros e para o estudo de gráficos

Provas: As provas consistirão de problemas ou questões que poderão abordar qualquer aspecto das experiências, como procedimentos, conceitos físicos envolvidos diretamente com as mesmas, dedução de fórmulas específicas para os cálculos das grandezas, cálculos numéricos, etc.

Testes: O primeiro teste consistirá de questões referentes ao conteúdo de teoria de erros e o segundo teste consistirá na elaboração de gráficos.

Relatórios: Após cada aula, o grupo deverá elaborar um relatório seguindo os roteiros disponibilizados pelos professores contendo: os cálculos, os gráficos (quando houver), discussão das questões propostas e dedução de fórmulas se forem solicitado na apostila e conclusão que deverá incluir comentários referentes aos resultados obtidos e aos procedimentos adotados e sua relação com a teoria envolvida.

Critérios de Avaliação

As avaliações no decorrer do semestre serão feitas através de duas provas, dois testes e nove relatórios com os seguintes pesos:

$$M_{parcial} = \frac{3M_{provas} + M_{testes} + M_{relatorios}}{5}$$

✓ Critérios Para Avaliação Dos Relatórios

- ***3 PONTOS*** - Pelas respostas à argüição do professor e pela participação em aula, envolvendo os aspectos: Pontualidade, tomada de dados e cálculos preliminares.
- ***3 PONTOS*** - Pela apresentação de cálculos completos, incluindo incertezas, bem como gráficos, quando houver.
- ***2 PONTOS*** - Por relacionar com a teoria, deduzindo fórmulas apresentadas no roteiro da experiência e discutindo os procedimentos adotados.
- ***2 PONTOS*** - Pela discussão dos resultados obtidos e das questões apresentadas no roteiro, quando houver.

Informações Gerais sobre o curso

•NÃO será permitido, **em hipótese nenhuma**, o uso de **calculadoras programáveis** (tipo HP ou similares), em **provas** e **testes**. Entretanto, recomenda-se a utilização de uma calculadora científica comum.

•O aluno poderá repor, em caso de falta, **apenas UMA** experiência da <u>primeira série</u> e **UMA** experiência da <u>segunda série</u>, nos **dias e horários** de **'Reposição de Experiências'** indicados no calendário.

•A 'Reposição de Experiências' é feita somente com a presença do monitor e o relatório relativo à experiência reposta só poderá atingir o **valor máximo de 7,0**.

•Os relatórios das experiências (**1 relatório por grupo**) deverão ser apresentados na aula seguinte daquela da realização da experiência, **sem prorrogação**.

•Em caso de falta do aluno às aulas dos dias dos testes, NÃO caberá reposição dos mesmos. Em caso de falta do aluno a uma das provas e **somente mediante a apresentação de atestado médico** na aula seguinte ao dia da prova, esta poderá ser reposta.

Relatórios

De uma forma geral, em ciência os resultados de um dado estudo são registrados e divulgados na forma de relatórios científicos. Entende-se por relatório científico um documento que segue uma definição prévia e redigido de forma que o leitor, a partir das indicações do texto, possa realizar as seguintes tarefas:

- ✓ Reproduzir as experiências e obter os resultados descritos no trabalho, com igual ou menor número de erros;
- ✓ Repetir as observações e formar opinião sobre as conclusões do autor;
- ✓ Verificar a exatidão das análises, induções e deduções, nas quais estiverem baseadas as conclusões do autor, usando como fonte as informações dadas no relatório.

O relatório deve ser auto-suficiente.

Relatórios

Partes de um Relatório:

Capa: Deve incluir os dados do local onde a experiência foi realizada (Universidade, Instituto e Departamento), disciplina, professor, equipe envolvida, data e título da experiência.

Introdução: Incluir a teoria considerada na experiência, evidenciando as hipóteses usadas para o estabelecimento de modelo físico proposto e as previsões baseadas neste modelo. As equações mais relevantes devem ser numeradas para poder fazer referência a elas mais adiante, quando forem confrontadas as previsões do modelo com os resultados experimentais. Todo os símbolos utilizados para representar as grandezas físicas envolvidas devem ser definidos.

Sistema experimental: Deve incluir os seguintes itens:

- Materiais utilizados, instrumentos de medição, sua precisão instrumental ou outra característica relevante;
- Montagem experimental, preferencialmente fazendo um desenho esquemático;
- Breve apresentação do procedimento adotado na experiência, na seqüência em que a experiência foi realizada.

Relatórios

Partes de um Relatório :

Dados experimentais: Deve apresentar os dados obtidos (preferencialmente em forma de tabelas), ou seja, todas as grandezas físicas medidas, incluindo suas unidades. Dados considerados anômalos devem ser identificados com uma anotação. Os erros de cada medida devem estar indicados. As tabelas devem ser numeradas em seqüência e conter uma legenda descritiva.

Cálculos: Todos os cálculos devem ser apresentados, incluindo as etapas intermediárias (cálculo de erros, métodos de análise gráfica, etc.), para permitir a conferência e recálculo pelo mesmo caminho. Os resultados experimentais devem ser apresentados com os algarismos significativos apropriados.

Análise de dados: Esta é a parte mais importante do relatório, na qual verifica-se quantitativamente se o objetivo inicialmente proposto foi atingido. De forma geral, o objetivo é comprovar ou não as hipóteses feitas na teoria. Todas as informações reunidas nos passos anteriores são comparadas entre si e analisadas. No caso de diferenças entre os valores esperados (teóricos) e os experimentais, estas devem ser calculadas, preferencialmente em porcentagem, e estabelecer uma margem de erro aceitável. Também devem ser comentadas as possíveis fontes de erro e limitações do aparelho.

Relatórios

Partes de um Relatório:

Conclusão: A conclusão apresenta um resumo dos resultados mais significativos da experiência e sintetiza os resultados que conduziram à comprovação ou rejeição da hipótese de estudo. Aqui deve ser explicitado se o objetivo(s) foi atingido, utilizando preferencialmente critérios quantitativos. Também deve indicar os aspectos que mereciam mais estudo e aprofundamento.

Bibliografia: São as referências bibliográficas que serviram de embasamento teórico.

Anexos: Os anexos são constituídos de elementos complementares, como por exemplo, gráficos. Estes devem ser numerados, contendo, título, eixos, escalas, unidades e barras de erro.

Rápida Revisão

1. Lembrem-se dos algarismos significativos, cálculos de incerteza, ...
2. Nesta disciplina os gráficos serão feitos no computador, mas clareza na escala, boa distribuição dos pontos no espaço, ... Serão ainda mais exigidos.

Grandezas Físicas e Padrões de Medidas

Grandezas Físicas → *Discrição quantitativa de um fenômeno físico.*

Todas as grandezas físicas podem ser expressas em termos de um pequeno número de unidades fundamentais.

Descrição Quantitativa → ***MEDIR***

Fazer uma medida significa comparar uma quantidade de uma dada grandeza, com outra quantidade da mesma grandeza.

É fundamental definir um padrão → definir uma *unidade* da grandeza.

A escolha de padrões de grandezas determina o sistema de unidades de todas as grandezas usadas em Física.

O sistema de unidades usado cientificamente é o Sistema Internacional (SI).

Grandezas Físicas e Padrões de Medidas

O ***SI*** é baseado em sete unidades fundamentais :

Grandeza	**Nome da Unidade**	**Símbolo**
comprimento	*metro*	*m*
massa	*quilograma*	*kg*
tempo	*segundo*	*s*
corrente elétrica	*ampère*	*A*
temperatura termodinâmica	*kelvin*	*K*
quantidade de substância	*mol*	*mol*
intensidade luminosa	*candela*	*cd*

Grandezas Físicas e Padrões de Medidas

Todas as outras unidades são derivados destas sete unidades fundamentais

Grandeza	Dimensão	Unidade
Velocidade	m/s	
Trabalho	N . M	Joule (J)
Potência	J/s	Watt (W)
Força	kg. m/s^2	Newton (N)
Aceleração	m/ s^2	
Densidade	kg/m^3	

Grandezas Físicas e Padrões de Medidas

Os prefixos dos múltiplos e submúltiplos *mais comuns* das grandezas fundamentais.

Múltiplo	Prefixo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Curiosidades:

Próton	**10^{-10} m, 10^{-27} kg**
Átomo	**10^{-10} m**
Vírus	**10^{-7} m , 10^{-19} kg**
Gota de chuva	**10^{-6} kg**
Período da radiação da luz visível	**10^{-15} s**
Terra	**10^{7} m , 10^{24} kg**
Sol	**10^{9} m , 10^{30} kg**
Via-Láctea	**10^{21} m , 10^{41} kg**
Universo Visível	**10^{26} m , 10^{52} kg , 10^{18} s**

Medidas Físicas

- ✓ *Medidas diretas:* resultado da leitura de uma magnitude diretamente no equipamento ou aparelho de medida.

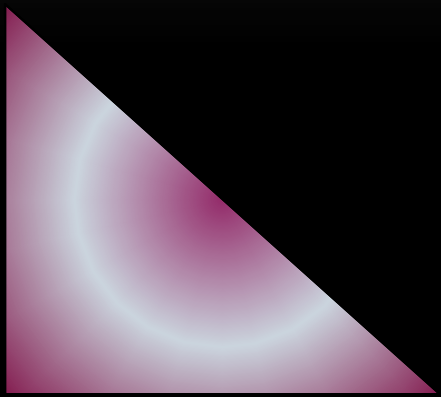
- ✓ *Medidas indiretas:* é a resultante da aplicação de relações matemáticas para a obtenção de uma grandeza que esta vinculada a outra facilmente medida.

$$v = \frac{S}{\Delta t}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios

Quanto vale a soma dos ângulos de triangulo? ***180°***



S Soma dos ângulos	Diferença entre o Valor Obtido e o Valor Real
179,8º	-0,2
180,4º	0,4
180,0º	0,0
180,6º	0,6
179,7º	-0,3

Em condições normais de pressão mediu-se a temperatura da água em ebulição e obteve-se o valor 98,2º C. A diferença entre o valor obtido e o valor considerado verdadeiro dessa grandeza é -1,8° C.

Mediu-se com uma régua a aresta de um cubo e obteve-se o valor: 1,23 cm. Neste caso é conhecido o valor real desta grandeza?

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios

Algumas grandezas possuem seus valores reais conhecidos e outras não. Quando conhecemos o valor real de uma grandeza e experimentalmente encontramos um resultado diferente, dizemos que o valor obtido está afetado de um erro, o qual pode ser definido como:

ERRO → Diferença entre um valor observado (V_{obs}) ao se medir uma grandeza e o valor real (V_{Real}) ou correto da mesma.

$$Erro = V_{obs} - V_{Real}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios

Conhecemos sempre o valor ***real*** ou ***exato*** da maioria das grandezas físicas?

A aceleração da gravidade ⟹ $g = 9.79 \ \dfrac{m}{s^2}$

valor absoluto ou aquele que mais se aproxima do que pode ser considerado seu valor real?

Nestas condições tem sentido falar-se no verdadeiro valor de uma grandeza?

DESVIO → *Diferença entre um valor observado (V_{obs}) ao se medir uma grandeza e o valor adotado (V_{adot}) que mais se aproxima teoricamente do valor Real*

$$Desvio = V_{obs} - V_{adot}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios

Na pratica trabalha-se com desvios e não com erros.

Desvio Relativo → **é a relação entre o desvio absoluto e o valor adotado como o mais próximo do valor real desta grandeza.**

$$Desvio\ \ Relativo = \frac{Desvio}{V_{adot}}$$

Exemplo: Um operador dispondo de um mesmo instrumento efetuou a medida de duas grandezas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Em cada um dos casos é conhecido o valor mais provável de cada grandeza

Grandeza $\overline{AB}$		Grandeza $\overline{CD}$	
Valor Obtido	8,00 cm	Valor Obtido	19,4 cm
Valor Mais Provável	8,40 cm	Valor Mais Provável	20,0 cm
Desvio Absoluto	0,4 cm	Desvio Absoluto	0,6 cm
Desvio Relativo	$\frac{0,40}{8,40} \cong 0,05$	Desvio Relativo	$\frac{0,6}{20,0} = 0,03$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Classificação

- ✓ Erros grosseiros → **Imperícia ou distração do operador.**
- ✓ Erros sistemáticos → **Causados por fontes identificáveis.**

Estes erros fazem com que as medidas efetuadas estejam consistentemente acima ou abaixo do valor real

- ➢ o instrumento → ***Intervalos de tempo medidos com um relógio que atrasa;***
- ➢ o método de observação → ***Efeito de paralax;***
- ➢ efeitos ambientais → ***Medida do comprimento de uma barra de metal, que pode depender da temperatura ambiente;***
- ➢ modelo teórico → ***Não incluir o efeito da resistência do ar numa medida da gravidade baseada na medida do tempo de queda de um objeto a partir de uma dada altura.***

- ✓ Erros Aleatórios → **Causas diversas e que escapam a uma análise em função de sua imprevisibilidade.**

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Medida $\xrightarrow{\text{INERENTE}}$ Erro

Poderá ser minimizado eliminando-se o máximo fontes de erro.

Avaliar quantitativamente as *incertezas* nas medições.

$$\underbrace{x}_{\text{Valor da medida}} \pm \underbrace{\Delta x}_{\text{Incerteza}}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Incertezas em Medidas Diretas

Medindo-se uma única vez

$$x \pm \Delta x$$

Medindo-se *N* vezes a mesma grandeza

$$x = x_m \pm \Delta x$$

$$x_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$$

Incerteza na medida e pode se determinada a partir dos dados experimentais

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Incerteza absoluta →

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{N} \frac{|x_m - x_i|}{N}$$

Desvio Padrão →

$$\Delta x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_m - x_i)^2}{N}}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Incertezas em Medidas Indiretas

Geralmente é necessário usar valores medidos e afetados por incertezas para realizar cálculos a fim de se obter o valor de outras grandezas indiretas.

$$V = f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, \ldots)$$

Soma ou subtração

$$\left.\begin{array}{r} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \\ C = c \pm \Delta c \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{r} a,\ b,\ c, \cdots = valores\ medidos \\ \pm\Delta a,\ \pm\Delta b,\ \pm\Delta c, \cdots = incertezas\ absolutas \end{array}\right)$$

$$S = A + B + C + \cdots = s \pm \Delta s \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s = \text{ valor calculado da soma} \\ \pm\Delta s = \text{incerteza absoluta da soma} \end{array}\right\}$$

Erros e Desvios: Incertezas

Incertezas em Medidas Indiretas

- Soma ou subtração (continuação)

$$S = s \pm \Delta s = a \pm \Delta a + b \pm \Delta b + c \pm \Delta c + \cdots$$

$$S = \underbrace{\left(a + b + c + \cdots\right)}_{s} + \underbrace{\left(\pm\Delta a + \pm\Delta b + \pm\Delta c + \pm\cdots\right)}_{\pm\Delta s}$$

Critério mais desfavorável

$$\pm\Delta s = \pm\left[\left|\Delta a\right| + \left|\Delta b\right| + \left|\Delta c\right| + \cdots\right]$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Incertezas em Medidas Indiretas

- Soma ou subtração (continuação)

Exemplo: Medindo-se com uma régua milimetrada, em duas etapas, o comprimento de um tubo obteve-se os valores indicados abaixo, juntamente com as incertezas adotadas pelo operador:

$$L_1 = (1,0000 \pm 0,0003)\,m \qquad L_2 = (0,0123 \pm 0,0005)\,m$$

$$L = L_1 + L_2 = \left[(1,0000 + 0,0123) \pm (0,0004 + 0,0003)\right] m$$

Critério mais desfavorável

$$L = (1,0123 \pm 0,0007)\,m$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Incertezas em Medidas Indiretas

- Multiplicação, divisão, radiciação e potenciação

Utilização do MONÔMIO ⟶ $$F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta}$$

$$A = a \pm \Delta a$$

$$B = b \pm \Delta b$$

$$C = c \pm \Delta c$$

$K = k \pm \Delta k \Rightarrow$ Constante que não depende da medida

$$F = f \pm \Delta f$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Incertezas em Medidas Indiretas

- Multiplicação, divisão, radiciação e potenciação $F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta}$

$$F = \underbrace{f}_{k.a.b^{\alpha}.c^{\beta}} \pm \Delta f$$

Critério mais desfavorável

$$\pm \Delta f = \pm f \left[\left| \frac{\Delta k}{k} \right| + \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \alpha \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \beta \frac{\Delta c}{c} \right| \right]$$

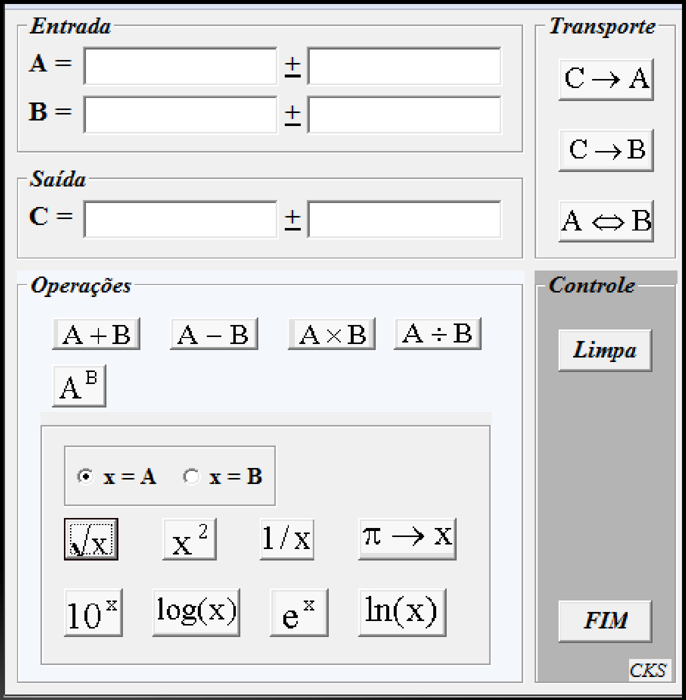
Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Incertezas em Medidas Indiretas

- Multiplicação, divisão, radiciação e potenciação

Para facilitar a vida:



Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Incertezas

Incertezas em Medidas Indiretas

- Multiplicação, divisão, radiciação e potenciação

Exemplo: Para o cálculo do volume de uma esfera, foi dado o raio da mesma: $R = r \pm \Delta r = (232{,}0 \pm 0{,}1)$ mm. Neste caso podemos calcular seu volume utilizando uma calculadora com dez dígitos, sem nos preocuparmos com a incerteza que afeta o número π.

$$V = v \pm \Delta v = \left(5{,}231 \pm 0{,}007\right) x10^{7}\, mm^{3}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Algarismos Significativos

A medida de uma grandeza física → Limitações → ***Sempre aproximada***

Número de algarismos que usamos para representar as medidas.

Por exemplo, se afirmarmos que o resultado de uma medida é $3,24\ cm$ estamos dizendo que os algarismos 3 e 2 são precisos e que o algarismo 4 é duvidoso.

Não tendo sentido físico escrever qualquer algarismo após o número 4.

Um único algarismo duvidoso

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Algarismos Significativos

Observações

✓Não é algarismo significativo o zero à esquerda do primeiro algarismo significativo diferente de zero.

$$l = 32,5m \quad = \quad l = 0,0325x10^{3}\, m$$

✓Zero à direita de algarismo significativo também é algarismo significativo.

$$l = 32,5m \quad \neq \quad l = 32,50\, m$$

✓***Arredondamento***.➔ Quando for necessário fazer arredondamento de algum número utilizaremos a seguinte regra: quando o último algarismo depois dos significativos for menor ou igual a 5, abandonamos; se for maior que 5 acrescentamos uma unidade ao significativo anterior.

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Algarismos Significativos

Operações

✓***Soma e subtração***: Após realizar a soma, o resultado deve apresentar apenas um algarismo duvidoso.

$$133,35\ cm\ -\ 46,7\ cm\ =\ 86,65\ cm\ =\ 86,6\ cm$$

✓ ***Produto e divisão:*** O resultado da operação deve ser fornecido com o mesmo número de algarismos significativos do fator que tiver o menor número de algarismos significativos.

$$32,74\,cm\ x\ 25,2\,cm = 825,048\ cm^2\ =\ 825\,cm^2$$

✓Algarismos significativos em medidas com erro

$$l = \left(82,7390 \pm 0,5678\right) cm\ \ = \left(82,7 \pm 0,6\right) cm$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e Desvios: Instrumentos de Medias

Grandeza	Aparelho	Precisão
Comprimento	Régua centimetrada	*1 cm*
Comprimento	Régua milimetrada	*1 mm*
Comprimento	Paquímetro	*0,1 mm*
Massa	Balança Digital	-
Tempo	Cronômetro	*0,01s até 0,0001s*

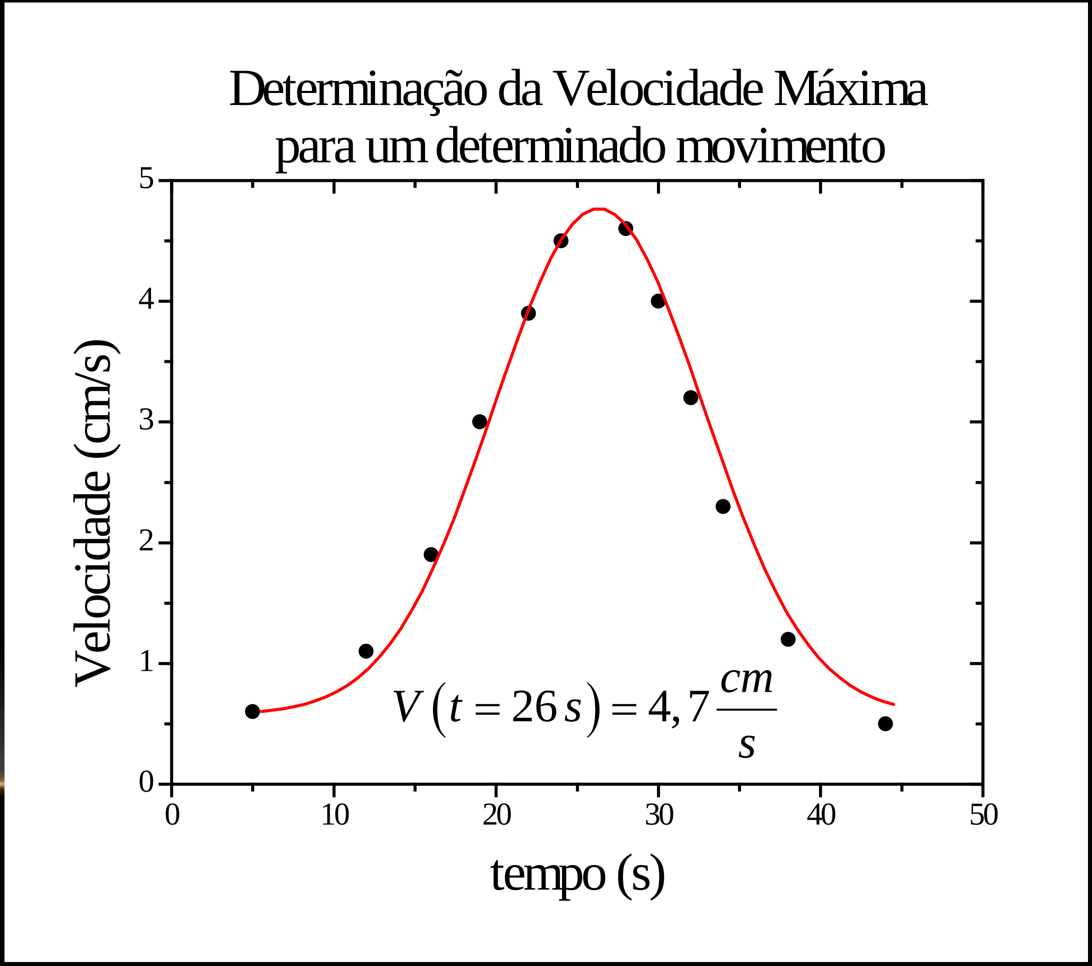
Gráficos

Gráficos são formas simples de visualizar padrões nas medidas.

Também são uma forma econômica de apresentar um grande volume de dados.

Velocidade de um corpo em função do tempo

Tempo (s)	Velocidade (cm/s)
5	*0,6*
12	*1,1*
16	*1,9*
19	*3,0*
22	*3,9*
24	*4,5*
28	*4,6*
30	*4,0*
32	*3,2*
34	*2,3*
38	*1,2*
44	*0,5*



Gráficos

Aspectos que devem ser observados na construção de gráficos

Há algumas regras básicas que devem ser seguidas na construção de gráficos:

- ✓ ***Título*** ➡ **Auto-explicativo**
- ✓ ***Eixos*** ➡ **Norma Universal:**
  - ***Variável independente*** ➡ **Abscissas**
  - ***Variável dependente*** ➡ **Ordenadas**
  - ***Nome das grandezas*** ➡ **Escreva o nome das grandezas relacionadas com os eixos** { **( ) ou ,** ***Exemplo***
  - ***Escala***
    - ➡ Deve-se escolher escalas convenientes tais que facilitem tanto a construção quanto a leitura dos gráficos.
    - ➡ Deve ter a informação do número de algarismos significativos das medidas.
    - ➡ Sugere-se adotar valores múltiplos ou submúltiplos de números inteiros.
      É importante mostrar o fator de conversão da escala
    - ➡ Nunca assinalar na escala as coordenadas dos dados experimentais.

Gráficos

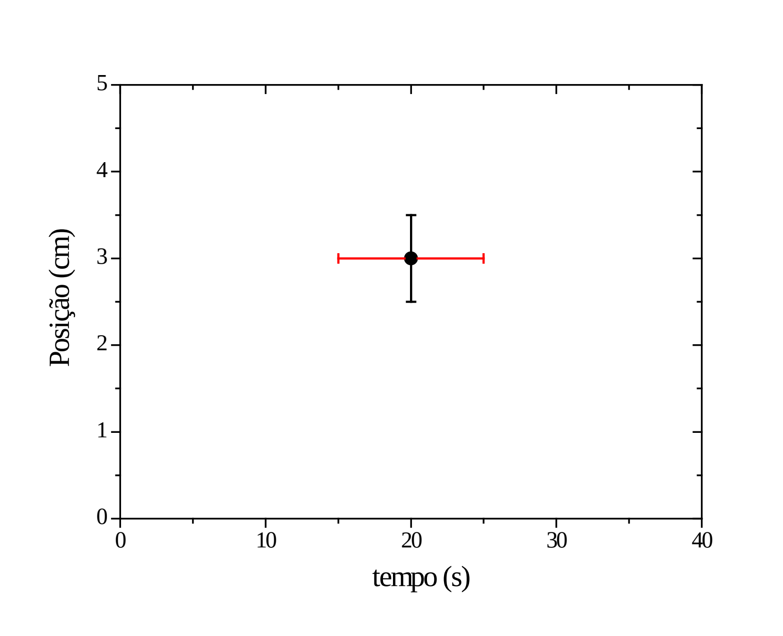
Aspectos que devem ser observados na construção de gráficos

Vimos anteriormente que qualquer medida experimental está afetado com uma incerteza

✓ ***Barras de erros*** ➡ **Os valores experimentais deverão ser representados com suas respectivas incertezas**

$$t = (20 \pm 5)\, s$$

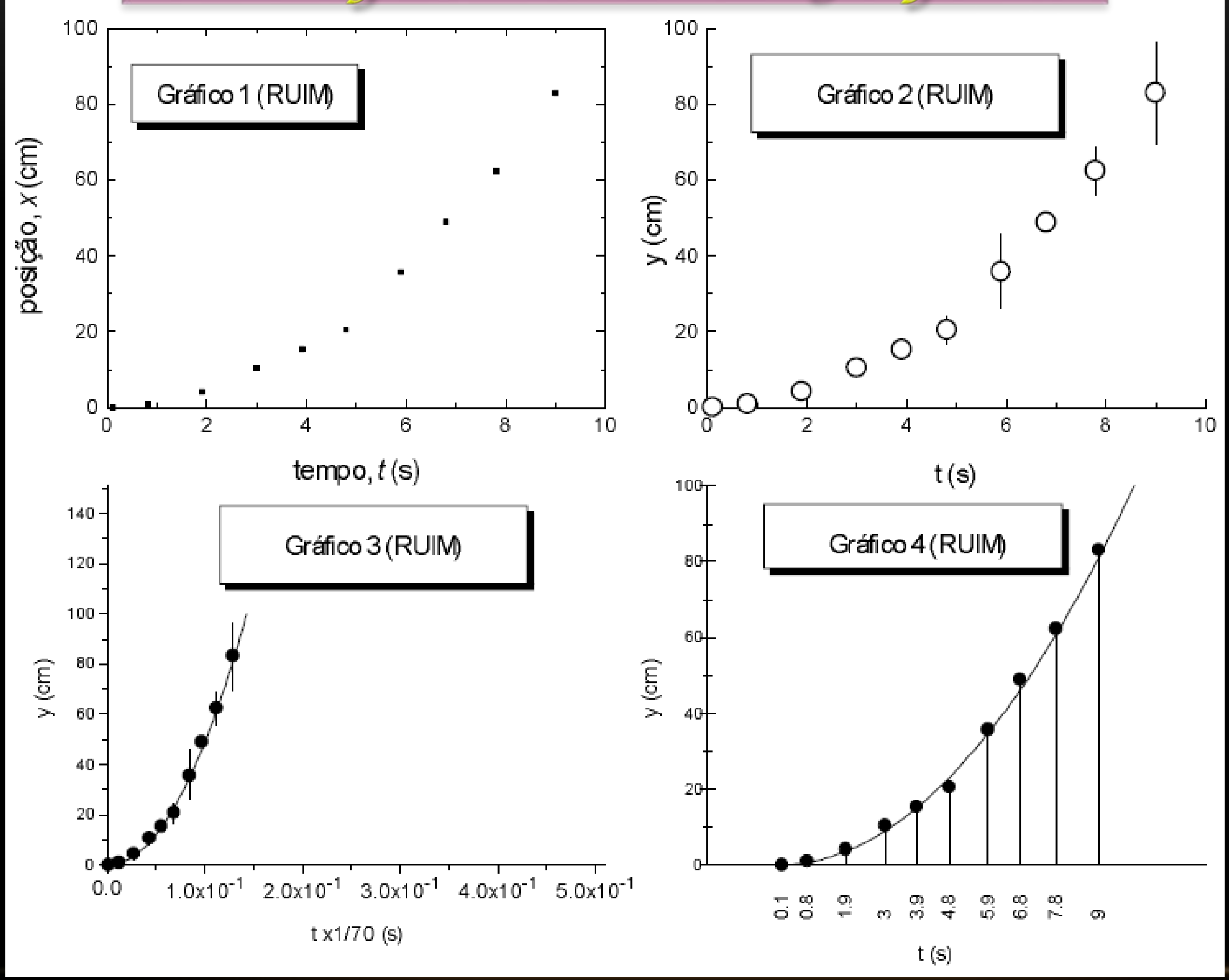
$$S = (3{,}0 \pm 0{,}5)\, cm$$



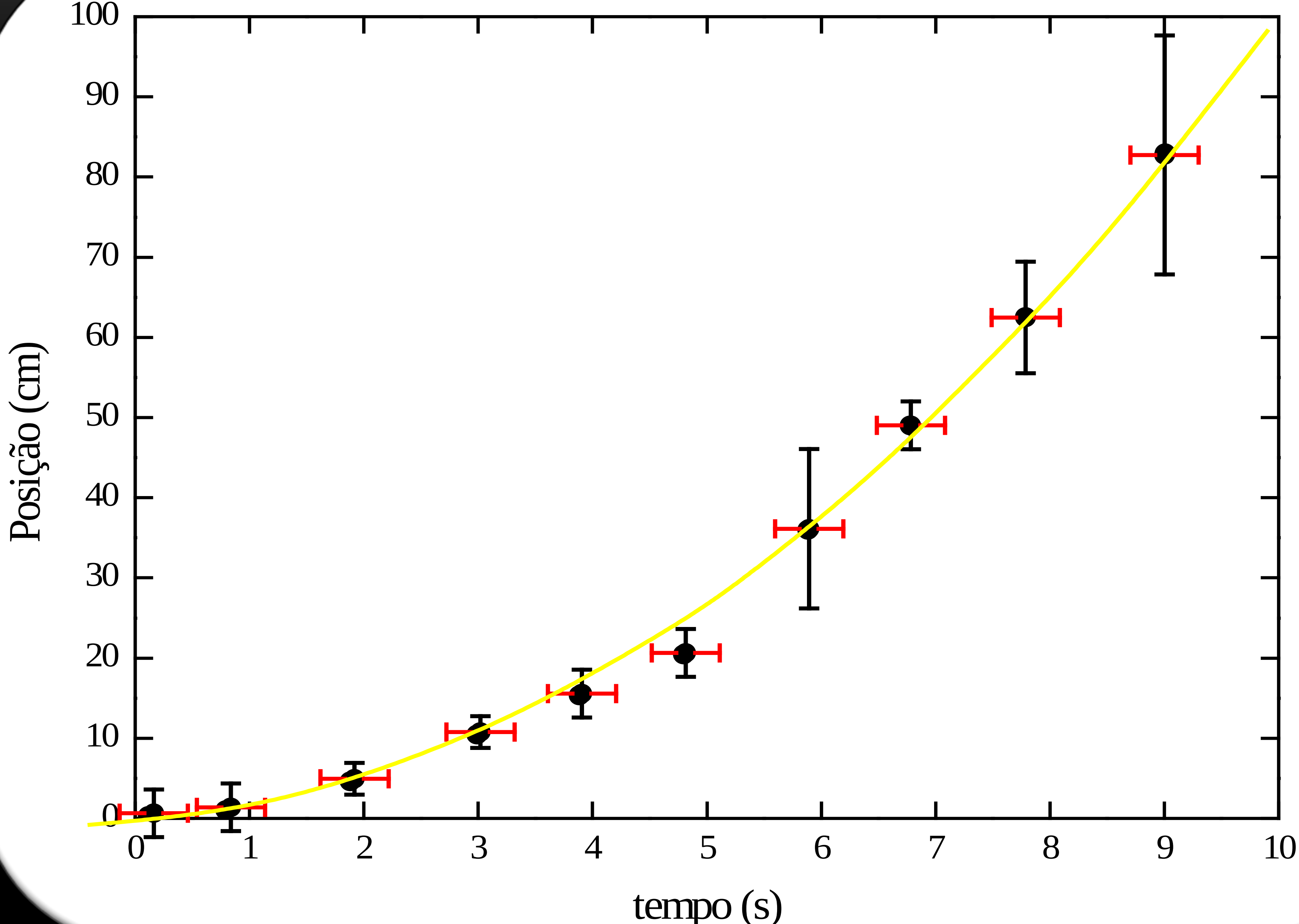
Quando não é possível desenhar as barras de incerteza, deve-se indicar no gráfico.

Gráficos

Exemplos Ruins de Gráficos



Gráficos



Aviso!

Quando todos os pontos experimentais já estiverem marcados no gráfico, resta traçar a curva. Esta não precisa passar sobre todos os pontos; de fato, é possível que a curva não passe por nenhum ponto do gráfico. Sendo assim, não é necessário que a curva tenha início no primeiro e termine no último ponto experimental.

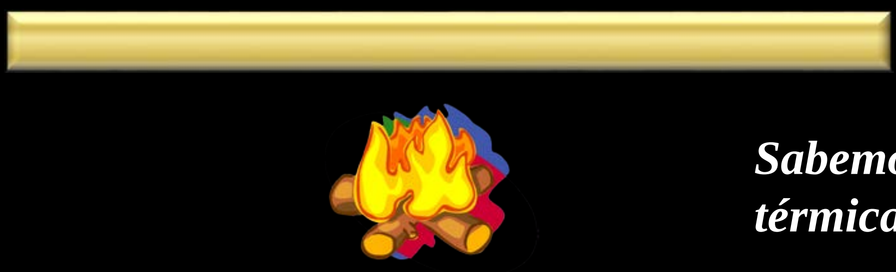
Gráficos

Análise Gráfica

Permite, em muitos casos, determinar a lei que rege um fenômeno físico.

✓***Conhecer a lei*** → **Elaborar modelos físicos**

Como varia o comprimento de uma barra metálica em função da temperatura?



Sabemos da teoria que a dilatação térmica é regida pela equação:

$$L = L_0 + \alpha L_0 \Delta T$$

onde α é o coeficiente de dilatação linear do material da barra

Gráficos

Análise Gráfica

Em uma escala linear, uma reta sempre é descrita da seguinte forma:

$$y = mx + b$$

onde **m** é o ***coeficiente angular*** da reta, descrito pela inclinação da reta, e **b** é o ***coeficiente linear*** , descrito pela interseção da reta com o eixo das ordenadas

Portanto, temos:

$$L \Leftrightarrow y \quad (variável)$$

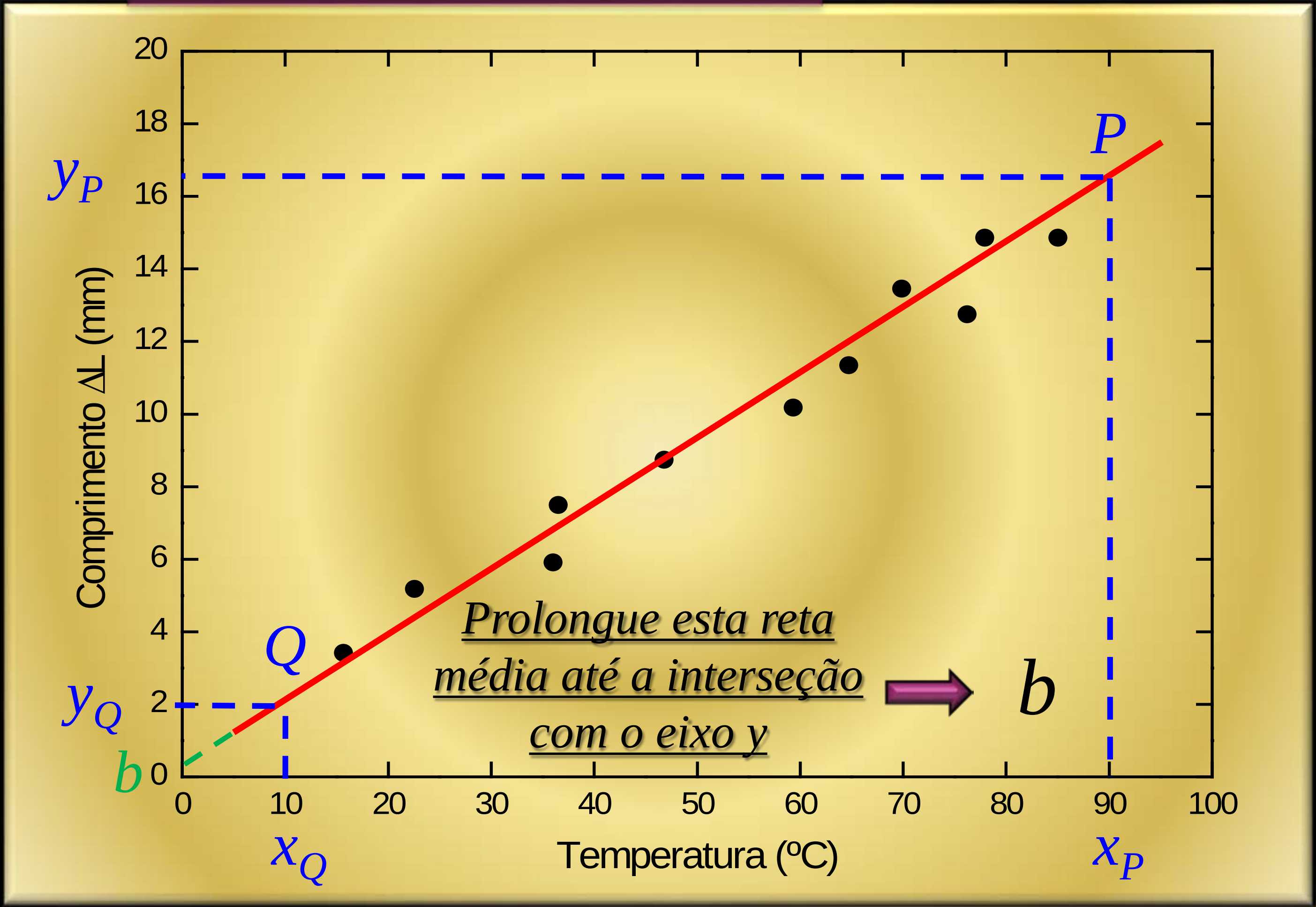
$$\Delta T \Leftrightarrow x \quad (variável)$$

$$L_0 \Leftrightarrow b \quad (constante)$$

$$\alpha L_0 \Leftrightarrow m \quad (constante)$$

Gráficos

Análise Gráfica



✓ Traça-se a reta média

✓ Tome dois pontos sobre a reta média

➔ Fora dos pontos experimentais

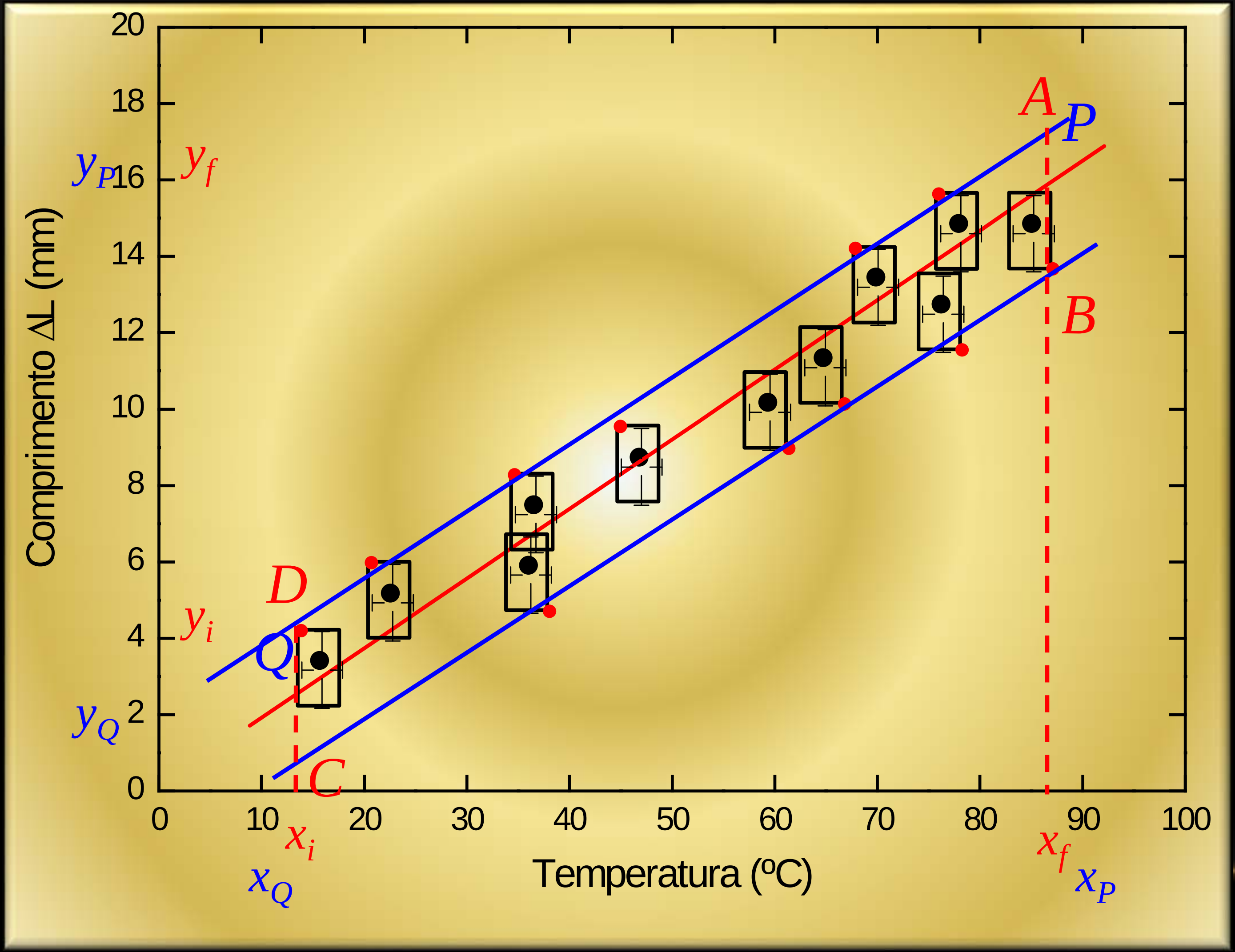
✓ Determine o coeficiente angular desta reta média

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$$

Gráficos

Análise Gráfica

Cálculo da incerteza do coeficiente angular

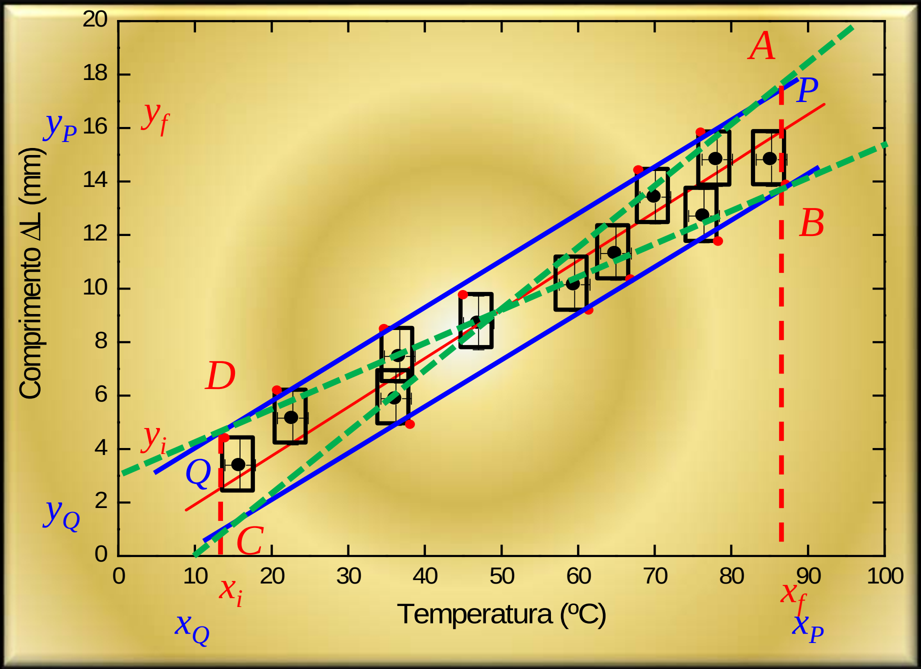


- ✓*Barras de incerteza das medidas*
- ✓*Desenhe um retângulo com as dimensões das incertezas*
- ✓*Determine os pontos sobre os retângulos que estão mais distantes da reta média*
- ✓*Trace duas retas auxiliares com estes novos pontos*
- ✓*Determine quatro pontos auxiliares sobre as retas auxiliares*

Gráficos

Análise Gráfica

Cálculo da incerteza do coeficiente angular



A incerteza no coeficiente angular será dado por:

$$\pm\Delta m = \pm\frac{1}{2}\left(m_{\text{sup}} - m_{\text{inf}}\right)$$

onde:

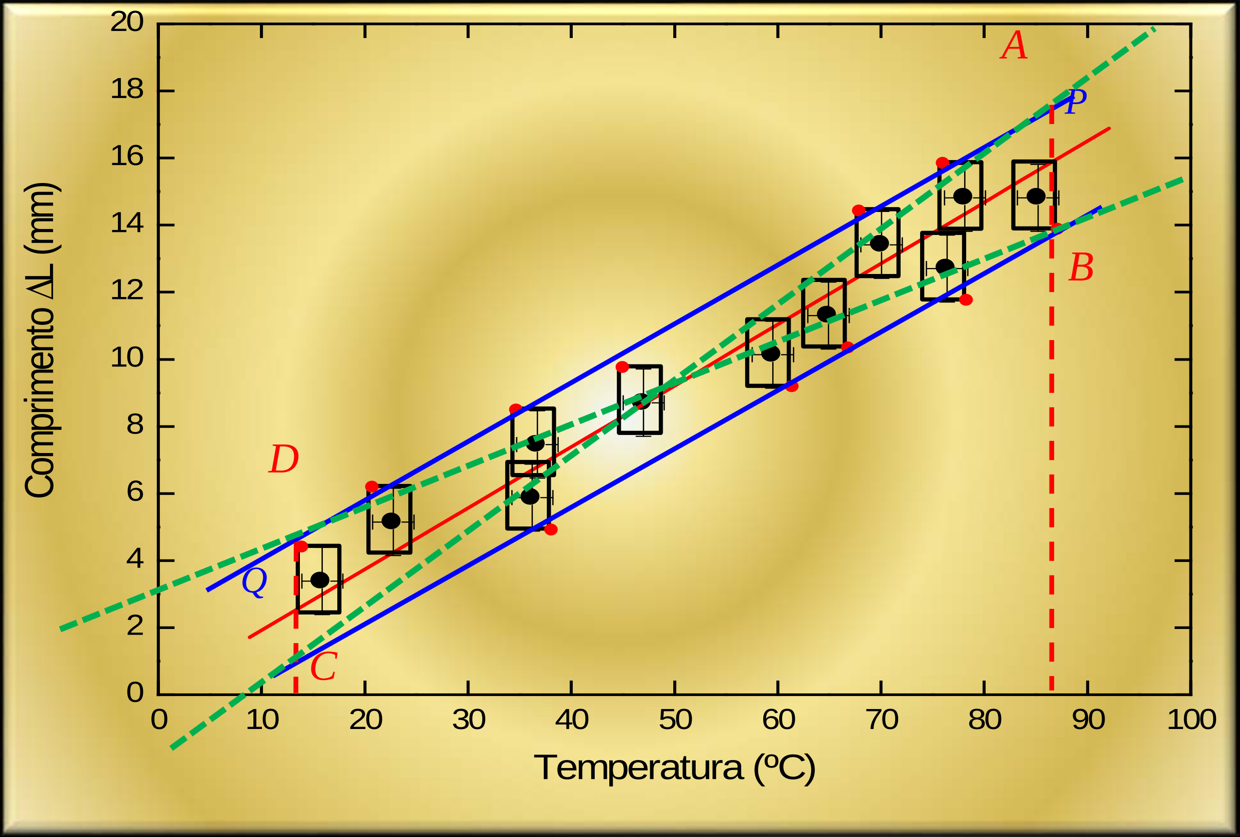
$$m_{\text{sup}} = \frac{y_A - y_C}{x_f - x_i} \qquad m_{\text{inf}} = \frac{y_B - y_D}{x_f - x_i}$$

$$\pm\Delta m = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{(y_A - y_C) - (y_B - y_D)}{x_f - x_i}\right)$$

Gráficos

Análise Gráfica

Cálculo da incerteza do coeficiente linear

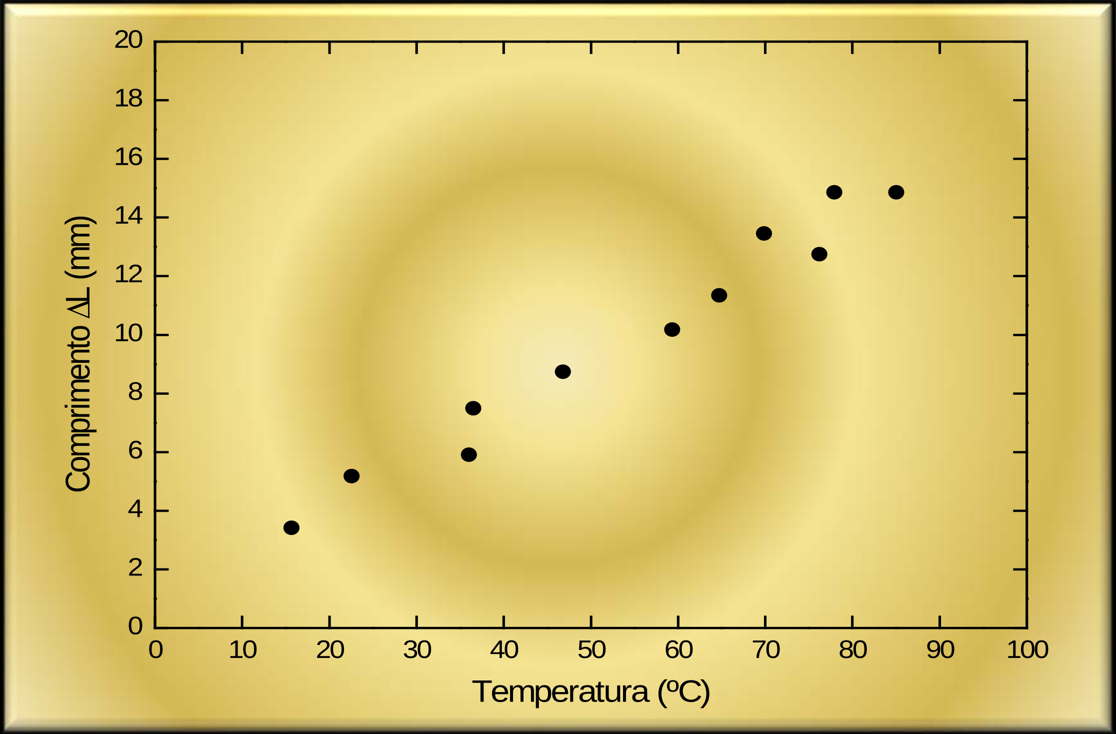


A incerteza no coeficiente linear é dado pela interseção das duas diagonais com o eixo y

$$\pm\Delta b = \pm\frac{1}{2}\left(b_{sup} - b_{inf}\right)$$

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos mínimos quadrados

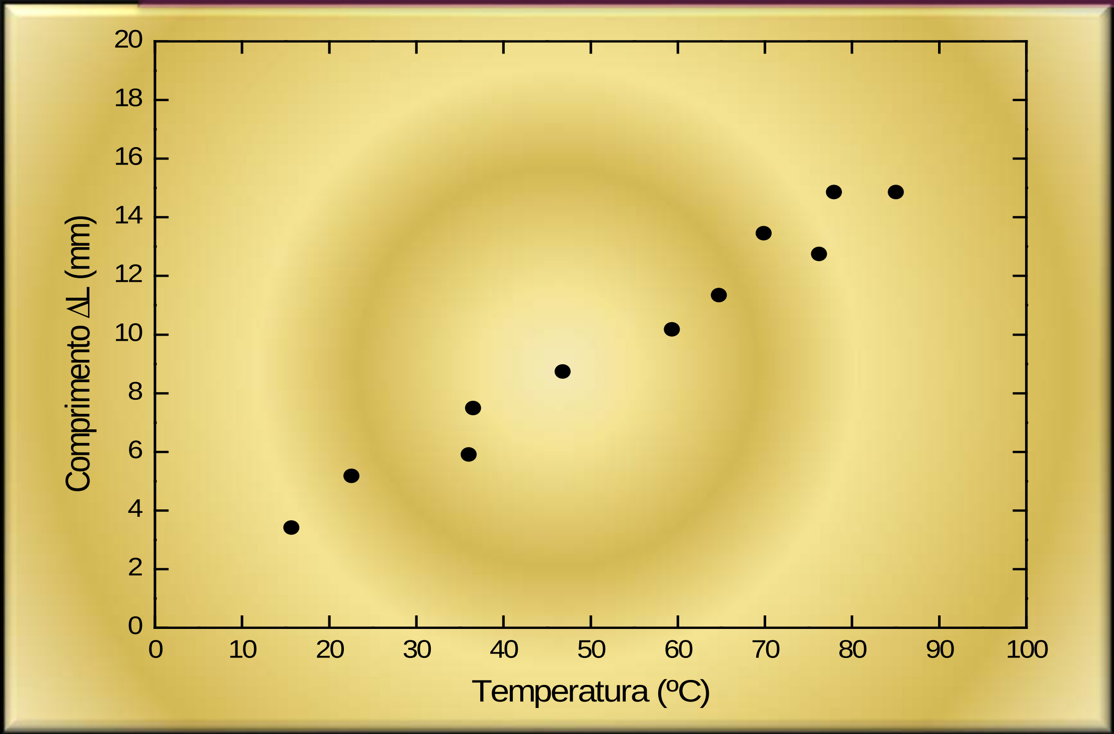


O ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados é importante, pois ao contrário do método gráfico, é independente da avaliação do experimentador. Este método consiste em minimizar o erro quadrático médio (S) das medidas. Considere então um conjunto de N medidas (y_i, x_i).

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{N} (y - y_i)^2 \Rightarrow y = mx + b$$

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos mínimos quadrados



Minimizar uma função em relação a certas variáveis é encontrar o menor valor possível para a variável.

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(m\left(x - x_i\right) + 2b\right)^2$$

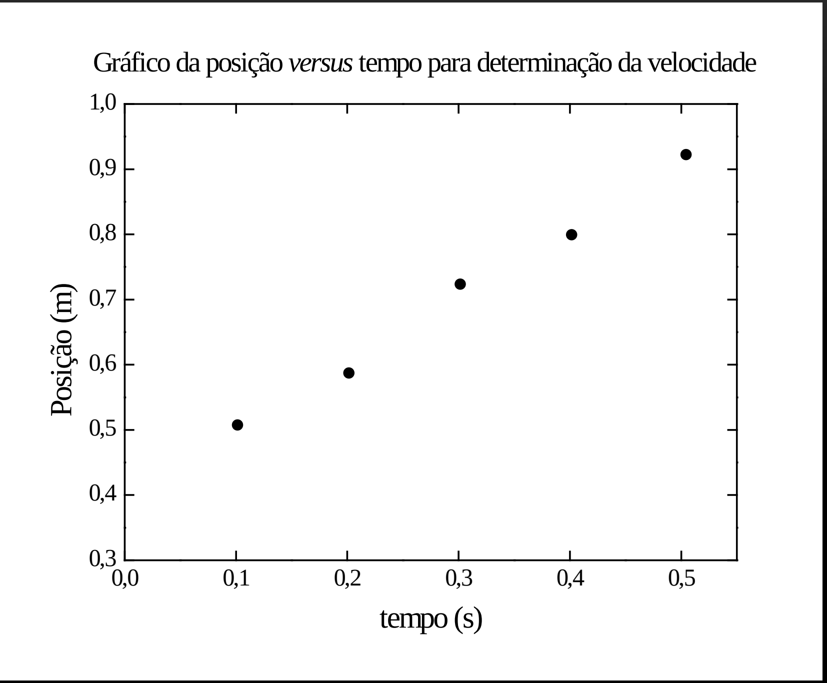
$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

$$m = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

Gráficos

Tempo (s)	Posição (m)
0,100	0,51
0,200	0,59
0,300	0,72
0,400	0,80
0,500	0,92



Tempo (s)	Posição (m)	xy	x^2
0,100	0,51	0,051	0,0100
0,200	0,59	0,12	0,0400
0,300	0,72	0,22	0,0900
0,400	0,80	0,32	0,160
0,500	0,92	0,46	0,250
Σx = 1,500	***Σy = 3,54***	***Σxy=1,17***	***Σx² = 0,550***

Com esses resultados, basta substituir os valores na fórmulas

$$m = v_0 = \frac{(5*1,17 - 1,500*3,54)}{5*0,550 - (1,500)^2} = 1,08\ \frac{m}{s} = 1,1\frac{m}{s}$$

$$b = x_0 = \frac{(0,550*3,54 - 1,17*1,500)}{5*0,550 - (1,500)^2} = 0,40\,m$$

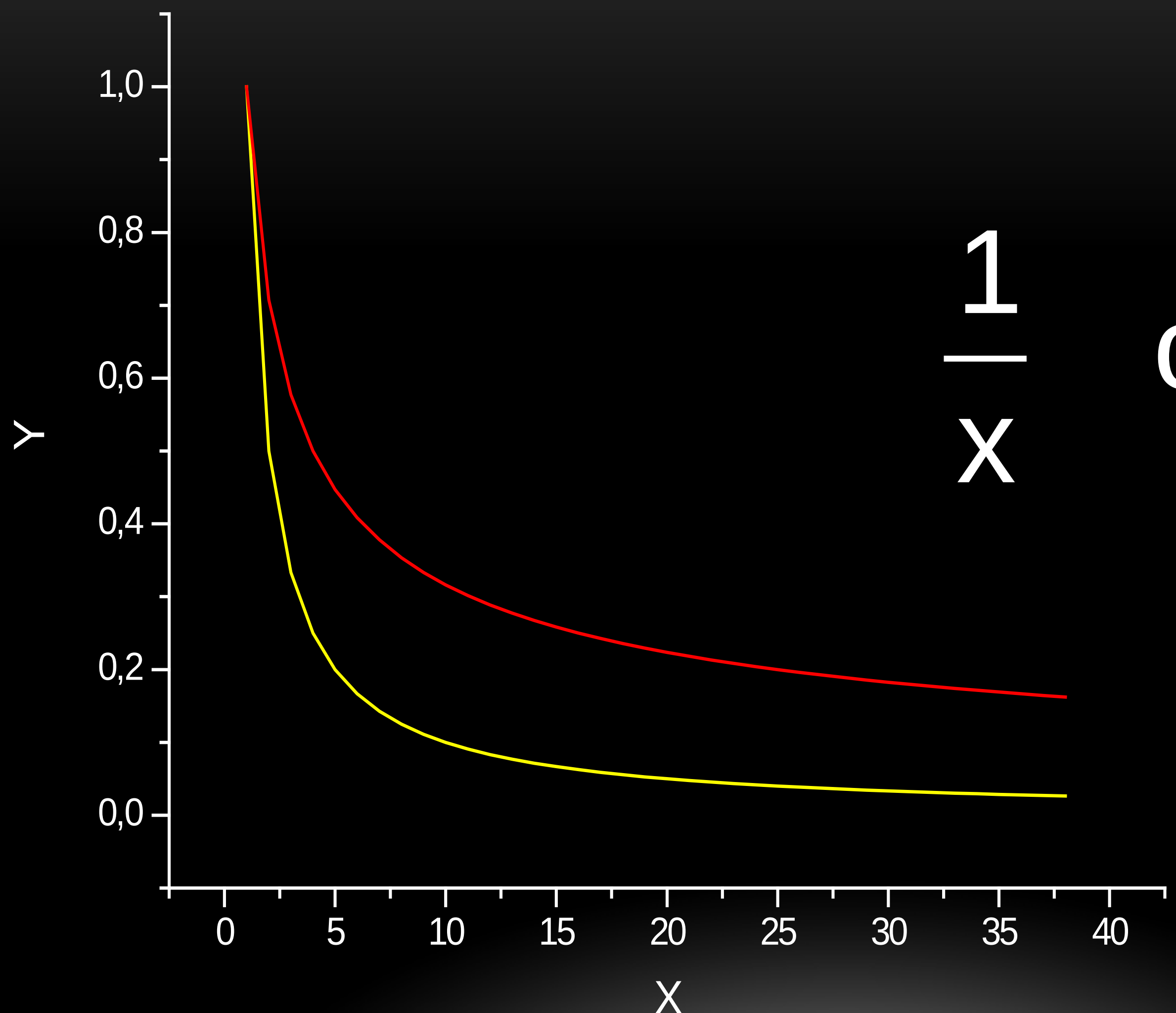
Gráficos não Lineares

Neste semestre serão estudados diversos sistemas cujas respostas são não lineares.

O Desvio-Padrão e a largura a Meia Altura serão utilizados como parâmetros de dispersão dos dados.

Linearização de Dados será utilizada sempre que necessário, como forma de avaliar modelos para os valores medidos.

Gráficos não Lineares



$$\frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}?$$

Linearização de Gráficos

É um processo bastante simples, envolvendo apenas uma mudança de variáveis. Através desta simples mudança, pode- se transformar em retas, mesmo equações muito complicadas. Vejamos uns exemplos que nos ensinam como fazer esta linearização.

$$y = kR^n$$

onde k = constante.

Para linearizar esta reta, vamos chamar $x = R^n$. Agora teremos então:

$$y = kx$$

que é a equação de uma reta, que passa pela origem (*b* = *0*), e possui inclinação igual a “k”. Plotar um gráfico “$y \times x$” representa o mesmo que plotar um gráfico “$y \times R^n$”.

Transformação em Lineares

Como muitos processos físicos são mais bem explicados com funções matemáticas não-lineares, foram desenvolvidos modelos não-lineares que se tornam lineares depois de uma transformação com logaritmos naturais *ln*, como mostra a tabela seguinte.

Tipo	Equação	Transformação	Variável x	Variável y
Linear	$y = a + bx$	$y = a + bx$	x	y
Exponencial	$y = ae^{bx}$	$\ln y = \ln a + bx$	x	$\ln y$
Logarítmica	$y = a + b\ln x$	$y = a + b\ln x$	$\ln x$	y
Potência	$y = ax^{b}$	$\ln y = \ln a + b\ln x$	$\ln x$	$\ln y$

Na primeira linha dessa tabela foi registrada a equação da regressão linear simples conhecida.

Nas outras três linhas da tabela estão registradas três funções não-lineares e as transformações das variáveis x e y para torná-las funções lineares semelhantes à da primeira linha da tabela.

Para cada uma dessas equações será apresentado o procedimento de ajuste de cada curva.

Construção De Gráficos

Definições e Convenções

ESCALA - É qualquer trecho de curva (em geral uma reta) marcada por traços, os quais estão em correspondência com valores ordenados de uma grandeza.

PASSO (*Δ L* **) -** É a distância (em cm, mm, etc) entre dois traços numerados e consecutivos numa escala.

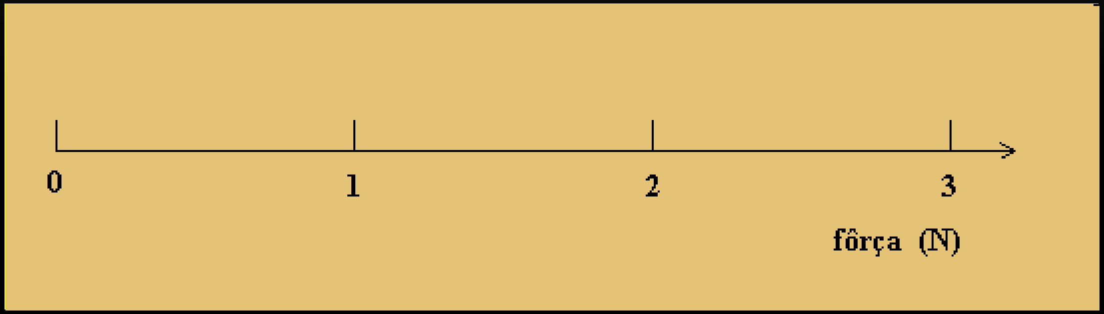
DEGRAU (***Δ f (x)*** **) -** É a variação da grandeza em um passo.

MÓDULO (***M*** **) -** É a constante de proporcionalidade existente entre o passo *Δ L* e o degrau *Δ f (x).*

$$M_a = \frac{|\Delta L|}{|\Delta f(x)|}$$

Escala Linear

Antes de explicar a escala logarítmica, façamos uma revisão mais sistemática da escolha de uma escala linear.



Para a escala acima temos:

PASSO = constante = 5 cm

DEGRAU = constante = 1 N

MÓDULO = constante = $M = 5\ cm/N$

Escala Linear

Deve-se levar em conta, na escolha do módulo *M* o comprimento disponível para o eixo, a variação da grandeza a ser representada, o interesse ou não de fazer o zero da grandeza coincidir com a origem da escala e as limitações de ordem prática impostas na sua escolha.

Exemplo:

Construir uma escala linear para representar uma diferença de potencial que varia de 0,328 V até 0,700 V sendo de 18 cm o comprimento disponível para o eixo.

Se a origem for ponto de interesse:

$$M = \frac{18cm}{0,700V} = 25,7cm/V$$

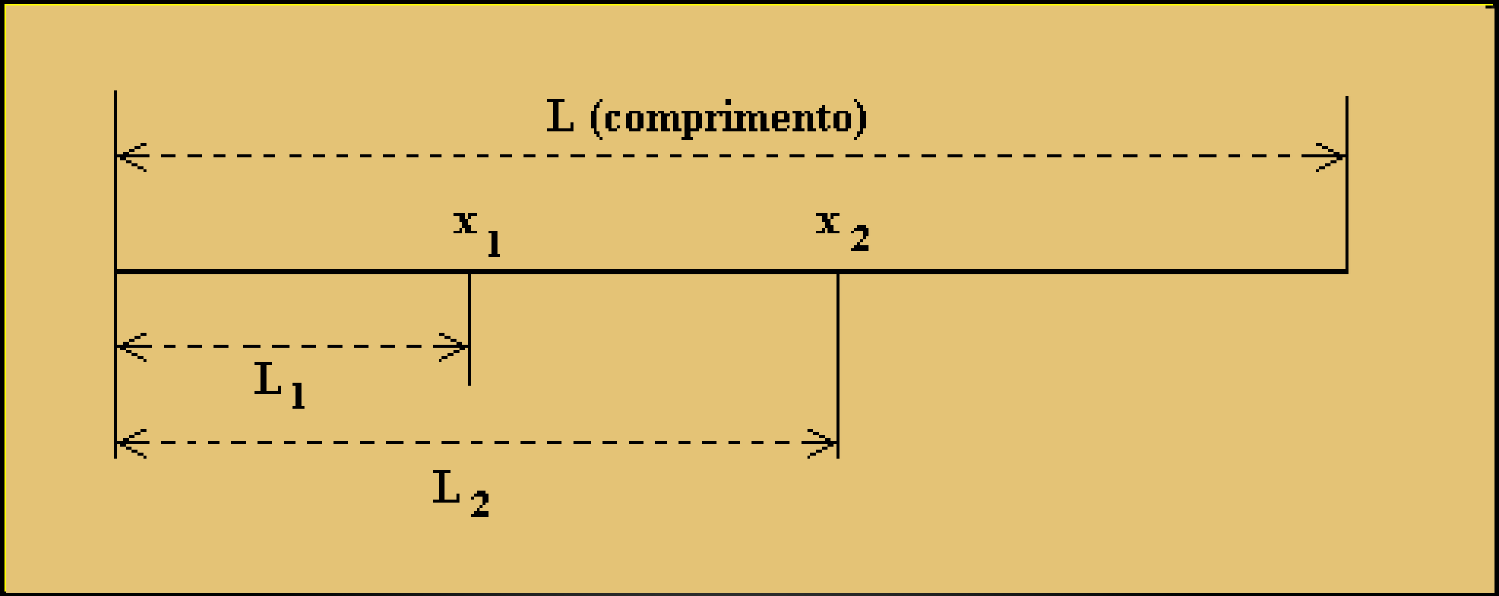
Isto leva em 2,5 cm para cada 0,1 Volt, com o uso de 17,5 cm do papel.

Escala Logaritmica

É possível linearizar gráficos aplicando a função logaritmo. Contudo, esse método pode se tornar excessivamente trabalhoso, uma vez que requer o cálculo do logaritmo de todos os pontos experimentais. Com o uso de papeis monolog ou log-log este cálculo não é necessário.

Escala Logarítmica

A confecção de uma escala logarítmica, corresponde à divisão de um determinado segmento de reta em partes proporcionais aos valores dos logaritmos dos números numa determinada base "*a*". Consideremos, um segmento de reta de comprimento "*L*" e que desejamos dividido-lo em partes proporcionais aos logaritmos dos números *n = 1, 2, ..., 10*.



Escala Logarítmica

Conforme definição, o módulo para esta escala será dado por:

$$M_a = \frac{|\Delta L|}{|\Delta f(x)|} = \frac{|L_2 - L_1|}{|\log_a x_2 - \log_a x_1|} = \frac{|\Delta L|}{\left|\log_a \frac{x_2}{x_1}\right|}$$

Se aplicarmos a relação acima para a base 10, tomando a variação de x_2 a x_1 igual a 10.

Década da escala logarítmica.

Escala Logarítmica

Qualquer segmento de reta *L (x)* medido a partir da origem 1, corresponderá o valor numérico do *log x* pela relação abaixo:

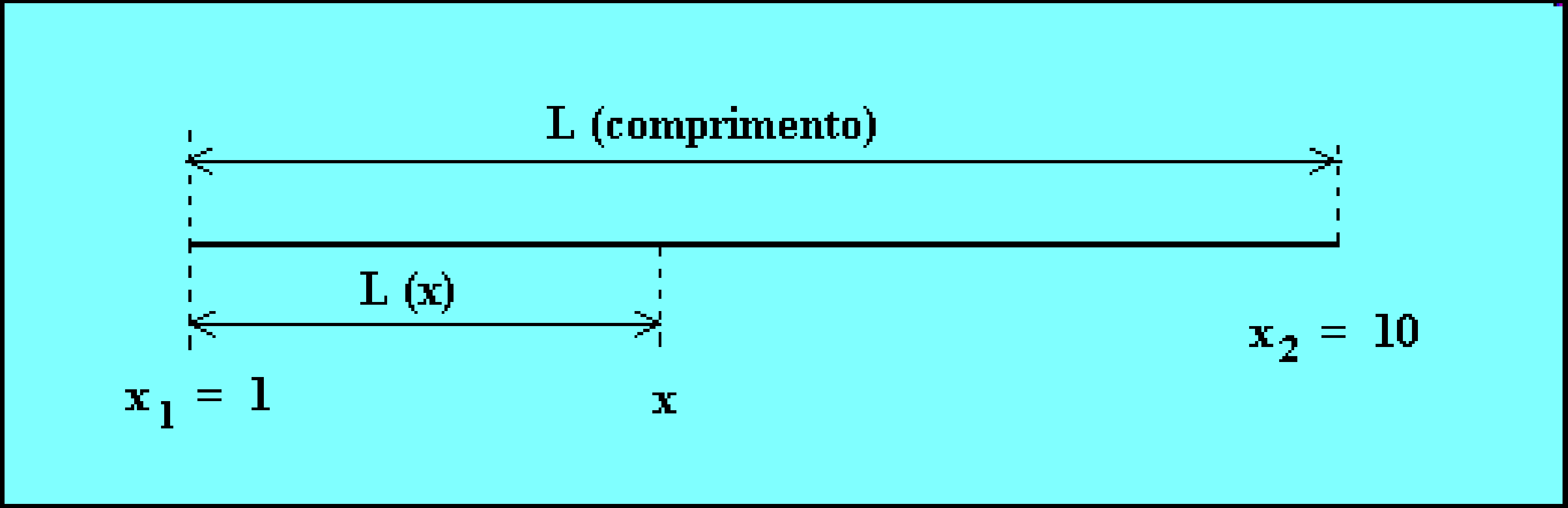
$$L_x = M \log_{10} x = L_{10} \log_{10} x$$

Ou seja:

$$\log_{10} x = \frac{L_x}{L_{10}}$$

Escala Logaritmica

Por esta relação podemos calcular o logaritmo de qualquer número *x* na base *10* como exemplificado na figura abaixo.



Determinação de $\log_{10}$ x.

Escala Logarítmica

N.B. As soluções abaixo foram obtidas com uso de um papel mono-log de uma década (modelo C.T.A. -1-3-21) Neste papel a década do eixo logarítmico tem comprimento L_{10} = 252 mm.

Outros papéis poderão apresentar comprimentos *L* diferentes mas evidentemente o resultado, sendo uma relação entre comprimentos, fornecerão resultados análogos.

$$\log 2 = \frac{L_2}{L_{10}} = \frac{76mm}{252\,mm} = 0{,}302$$

Uso de Papel Mono-Log

Neste papel, um dos eixos é uma escala logarítmica e o outro é uma escala linear. Este tipo de papel é utilizado quando a função a ser representada é do tipo:

$$y = kb^{cx}$$

Uso de Papel Mono-Log

Note que na relação acima, qualquer que seja o número *b*, ajustando-se as constantes k e c podemos representar a mesma curva, isto é, existem infinitas maneiras de se representar a mesma curva.
Em física, é muito conveniente usar para *b* o número irracional *e = 2,7182818...* base dos logarítmicos neperianos. Desta forma a relação entre x e y é escrita:

$$y = ke^{cx}$$

Uso de Papel Mono-Log

Aplicando logarítmo neperiano (base e) aos dois membros da equação:

$$y = ke^{cx}$$

Temos:

$$\ln y = \ln k + cx$$

Vemos que esta é uma relação linear entre ln y e x com coeficiente linear ln k e coeficiente angular c.
Como vimos anteriormente, distâncias estarão representando os logarítmos dos números portanto, para se construir o gráfico, basta marcar diretamente os pontos correspondentes aos valores de x e y nos eixos logarítmicos.

Uso de Papel Mono-Log

O coeficiente linear *ln k* da equação é obtido diretamente da ordenada *y* correspondente a $x = 0$ e como neste caso:

$\ln y = \ln k$ temos o valor de $y = k$ no ponto correspondente a $x = 0$.

Costuma-se indicar o valor de *y* para $x = 0$ como y_0 portanto:

$$y_0 = k$$

Quanto ao coeficiente angular da reta será dado pela relação:

$$c = \frac{\Delta \ln y}{\Delta x} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

Uso de Papel Mono-Log

Lembrando que:

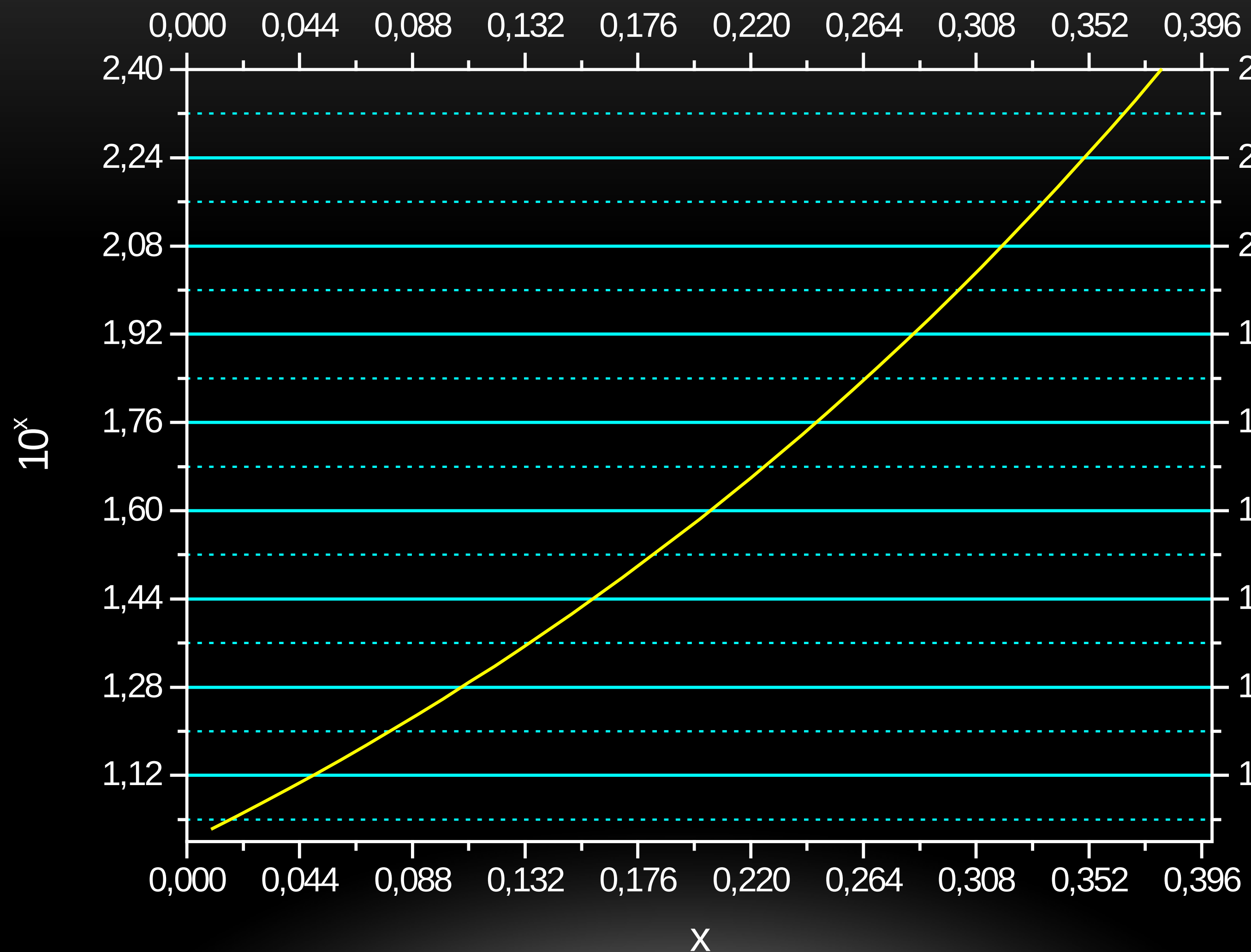
$$L_n = M_e \ln y_n$$

substituindo na relação acima obtem-se diretamente do gráfico:

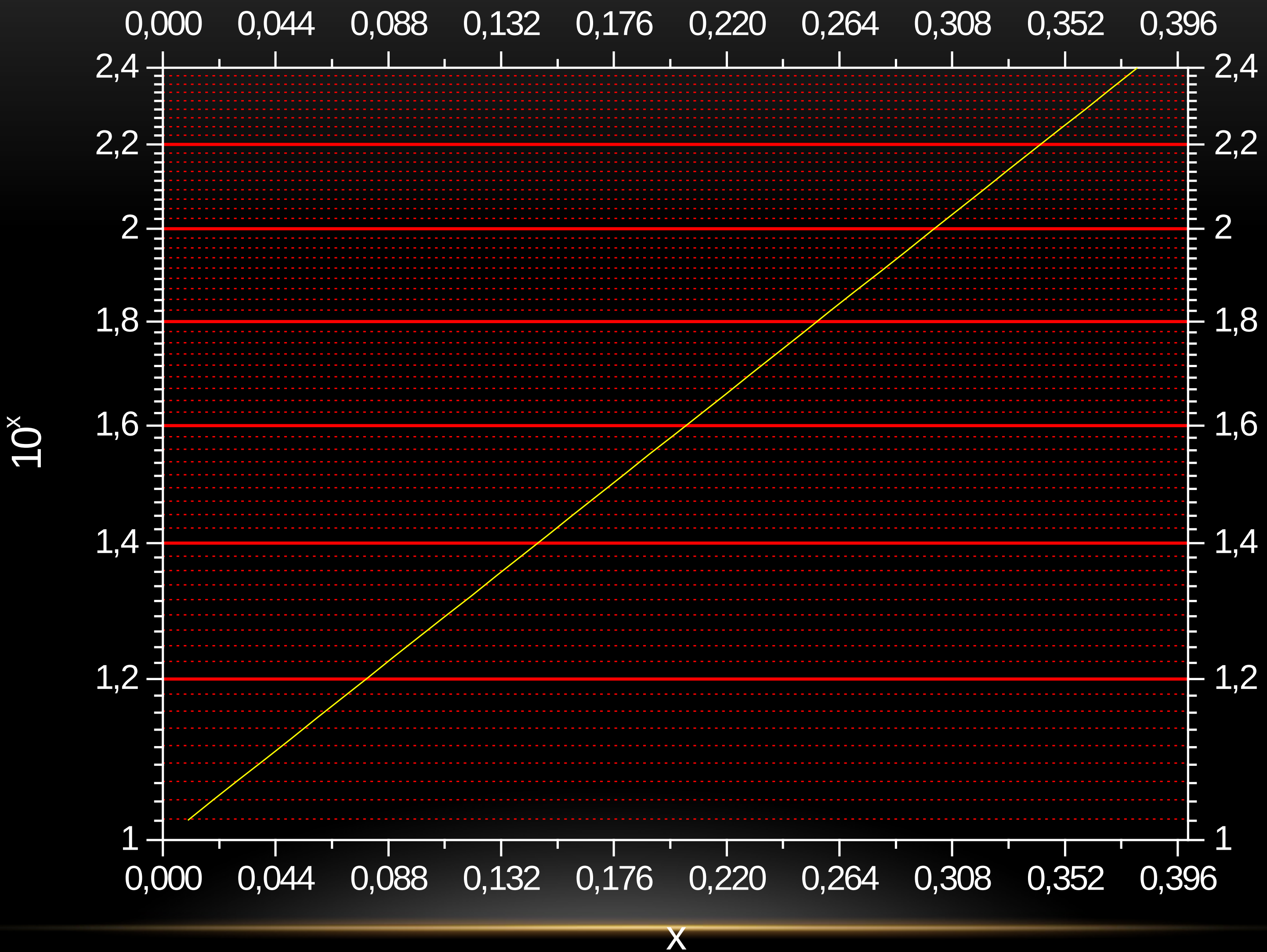
$$c = \frac{L_2 - L_1}{M_e(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta L}{M_e \Delta x}$$

Onde o módulo M_e da escala na base e, assim como ΔL e Δx são obtidos diretamente do gráfico medindo-se as distâncias correspondentes com uma régua.

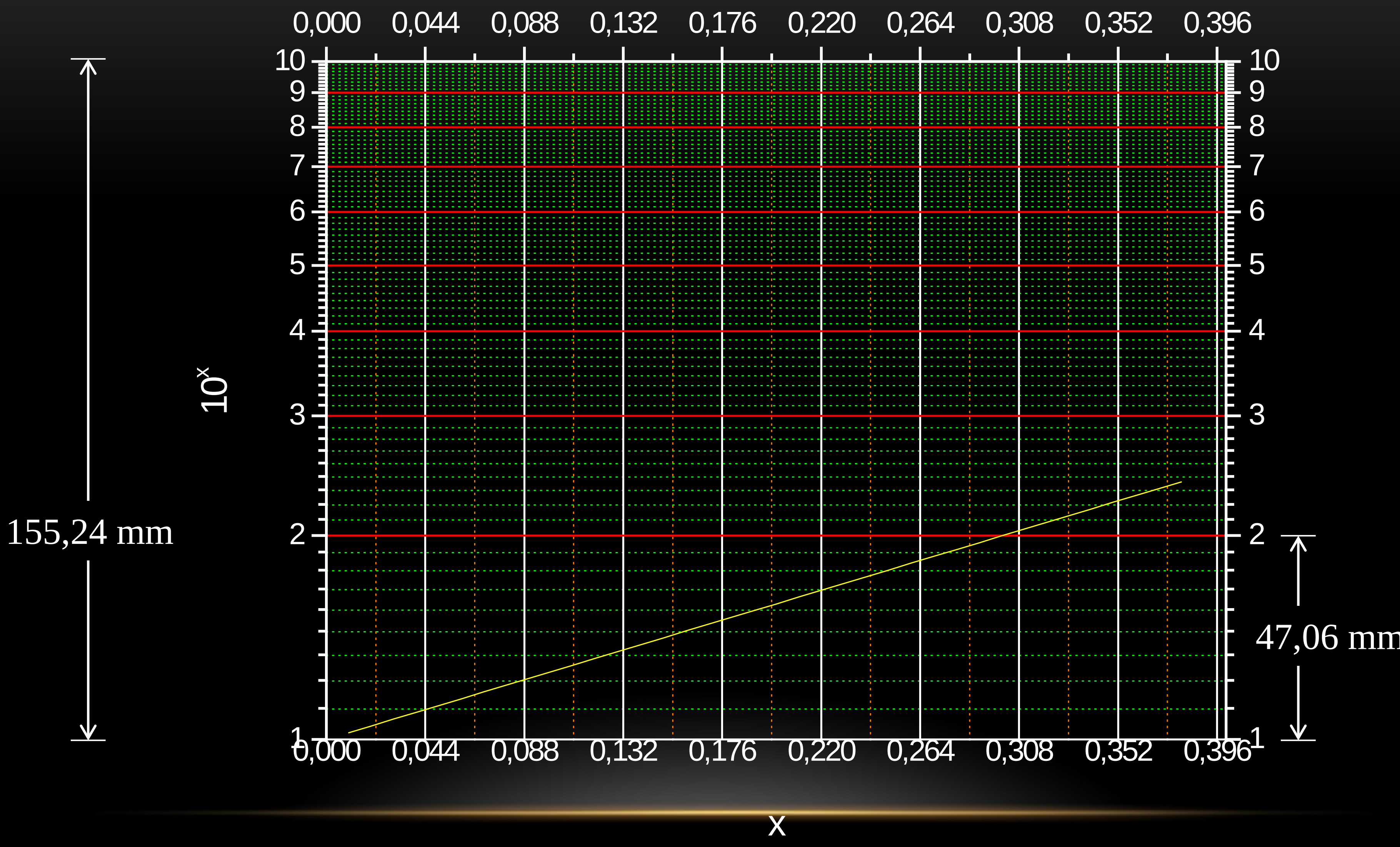
Uso de Papel Mono-Log



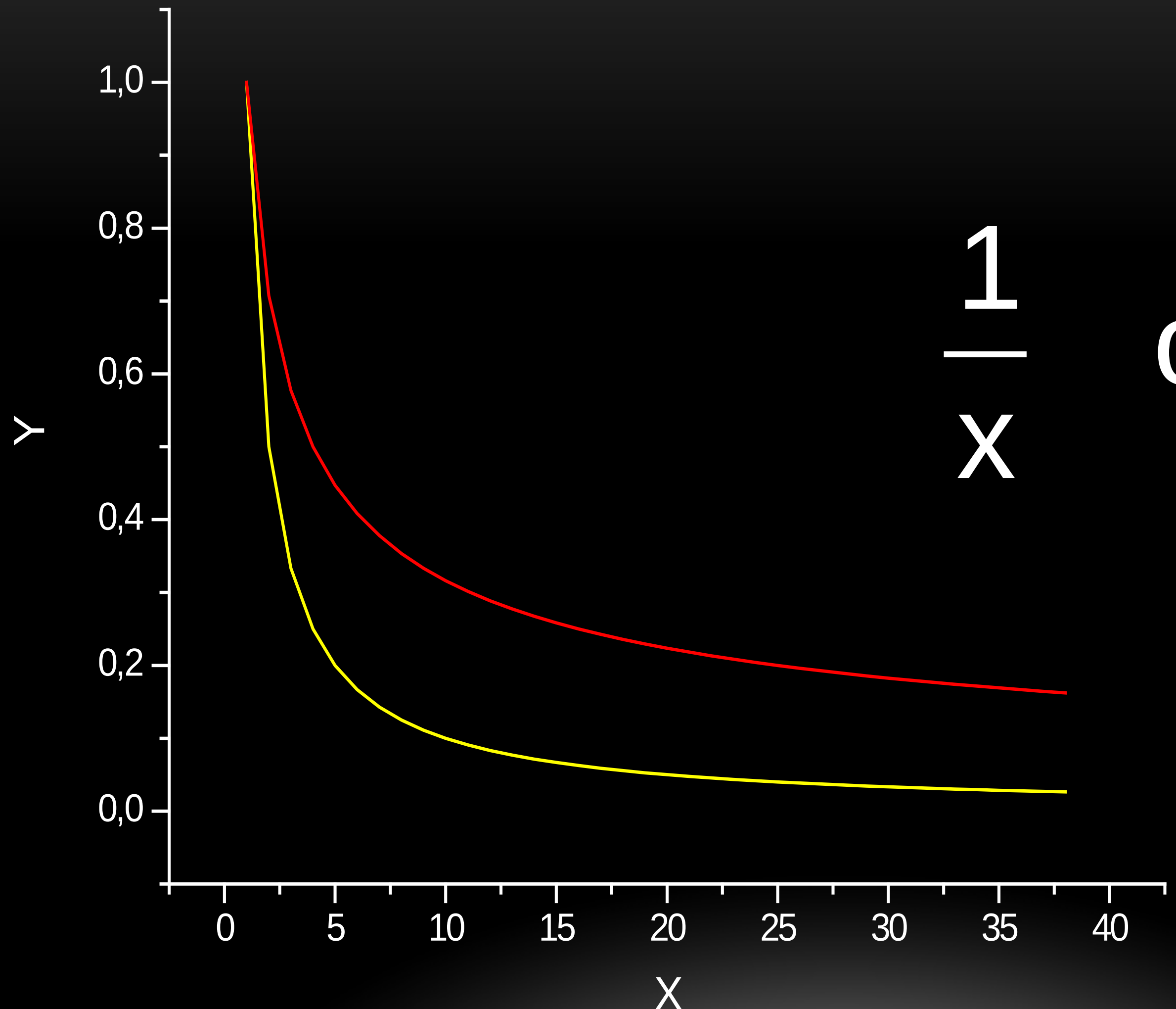
Uso de Papel Mono-Log



Uso de Papel Mono-Log



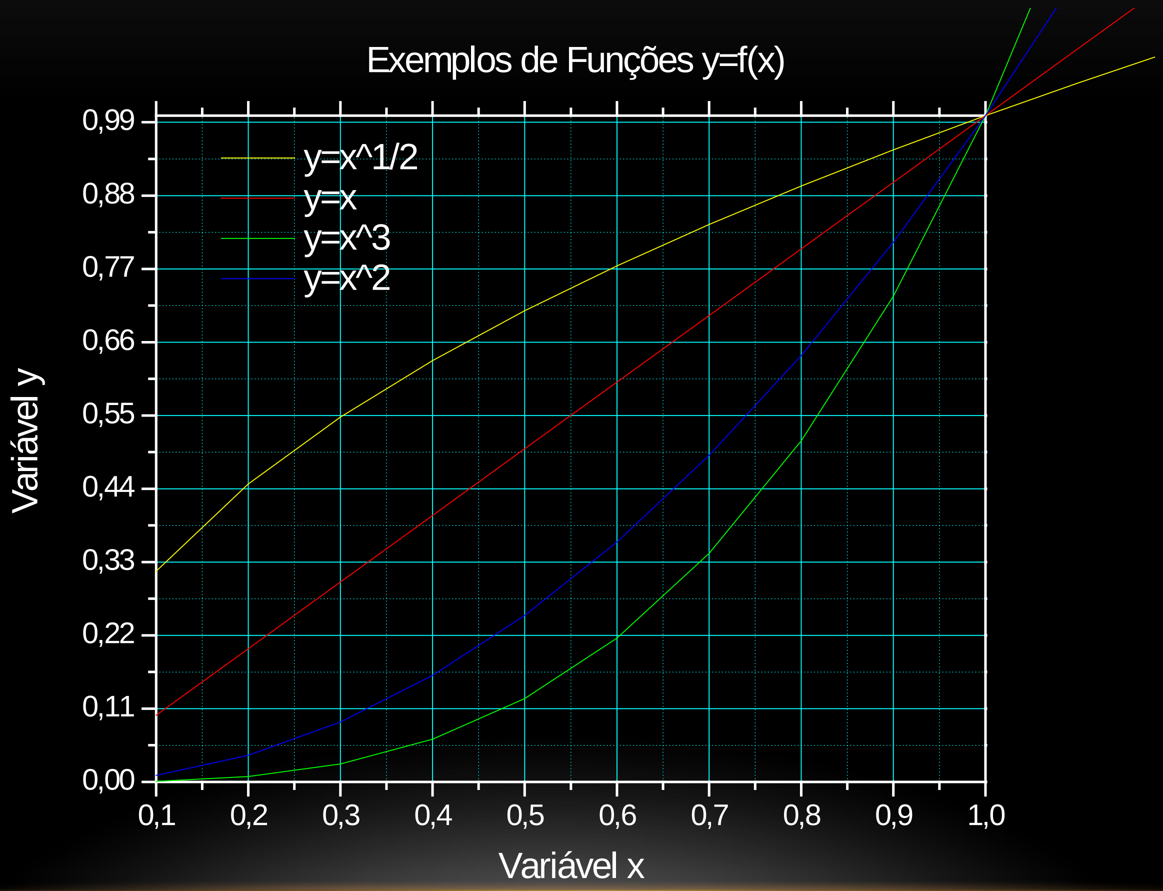
Gráficos não Lineares



$$\frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}?$$

Gráficos não Lineares

Esta dificuldade desaparece quando se obtém uma linha reta, que é de fato, a chave da análise gráfica, pois pode ser identificada com segurança.



Linearização de Gráficos

Neste processo parte-se de um conjunto de pares ordenados (x,y) tais que a relação entre eles é dada por uma função não linear. Efetua-se então uma mudança de variáveis nas grandezas físicas medidas, de forma a obter-se uma reta, cujo gráfico é representado em papel milimetrado.

Linearização de Gráficos

Através desta simples mudança, pode- se transformar em retas, mesmo equações muito complicadas. Vejamos uns exemplos que nos ensinam como fazer esta linearização.

Seja: $$y = KR^n$$

onde K = constante

Para linearizar esta reta, vamos chamar $x = R^n$. Agora teremos então:

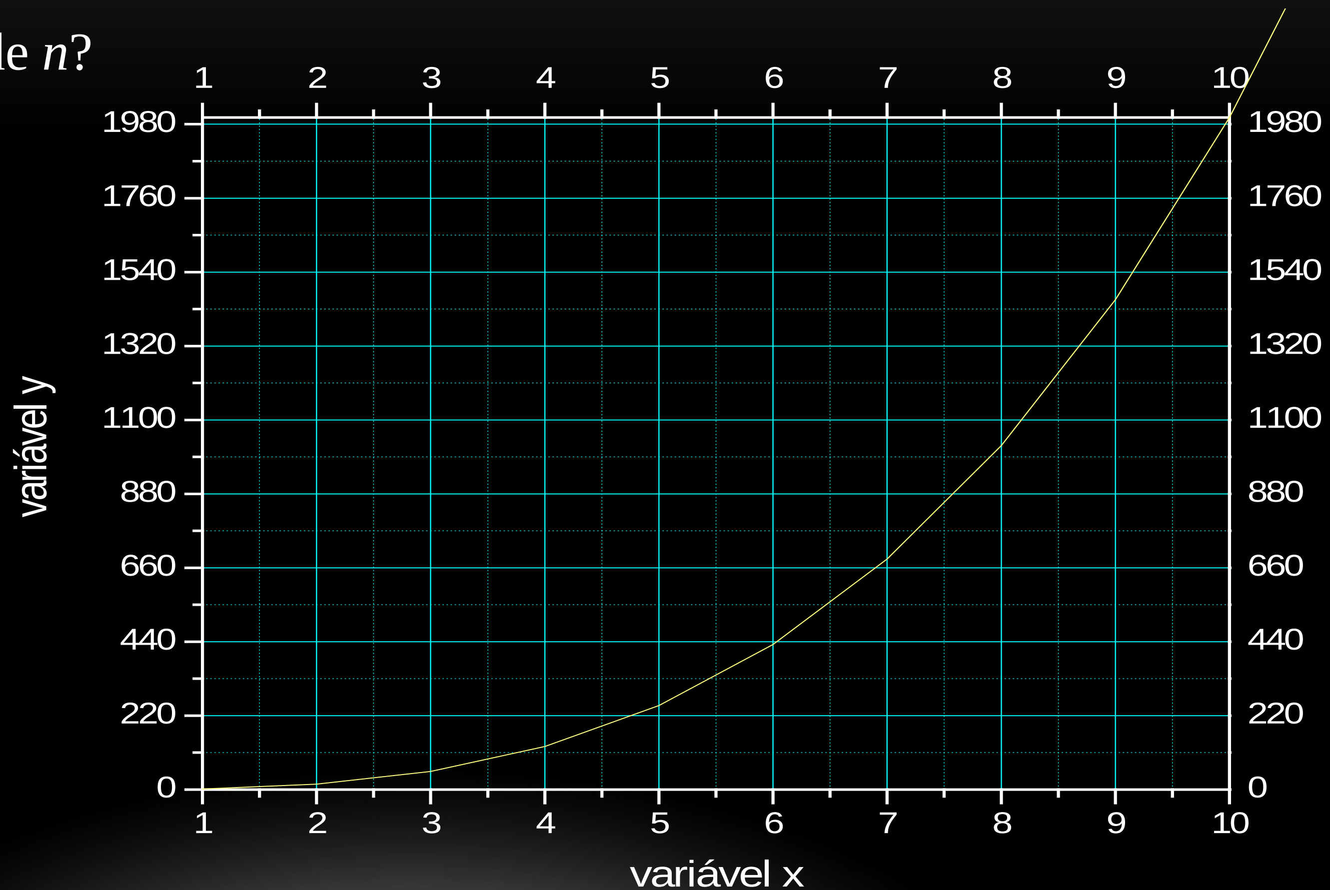
$$y = Kx$$

que é a equação de uma reta, que passa pela origem (*b* = *0*), e possui inclinação igual a "*K*". Plotar um gráfico "*x versus y*" representa o mesmo que plotar um gráfico "R^n *versus y* ".

Linearização de Gráficos – Funções Polinomiais.

Tomemos como exemplo o gráfico de $y = ax^n$ para x entre 1 e 10.

Qual o valor de a e de n?



Linearização de Gráficos - Funções Polinomiais.

Bom, a função é:

$$y = ax^n$$

Posso “brincar” um pouco com ela:

$$\log y = \log(ax^n)$$

$$\log y = \log(a) + n\log(x)$$

Linearização de Gráficos - Funções Polinomiais.

Que tal tentar algo como:

$$Y = B + AX$$

Onde:

$$Y = \log(y)$$

$$X = \log(x)$$

$$B = \log(a)$$

$$A = n$$

Linearização de Gráficos - Funções Polinomiais.

$$Y = B + AX$$