

Matemática: natureza e ensino-aprendizagem

Lúcio Fassarella
DMA/CEUNES/UFES

April 21, 2015

Abstract

Breve discussão sobre a natureza da Matemática e os fundamentos do seu ensino e aprendizagem.

Contents

1 A natureza da Matemática	1
1.1 Sobre <i>como resolver problemas matemáticos</i>	2
2 Ensino-aprendizagem	4
2.1 Fundamentos	4
2.2 Sobre <i>Resolução de Problemas</i>	5
2.3 Sobre <i>Investigação Matemática</i>	6
A Como está a educação matemática no Brasil?	8

1 A natureza da Matemática

Essencialmente, *a Matemática é a arte de revelar padrões e resolver problemas que envolvem as idéias de número e forma*. É uma *arte* no sentido de *estética* e no sentido de *técnica*.

Os problemas matemáticos são bastante diversificados e muitos surgem de situações concretas. Em nossa sociedade tecnologicamente avançada, a ubiquidade das aplicações matemática no cotidiano e na ciência torna necessária a universalização de seu ensino básico (bem como justifica a existência de uma classe de profissionais e professores especializados); contudo é importante distinguir entre “o que é” do “para que serve” a Matemática, pois dessa distinção depende uma compreensão mais ampla e profunda da disciplina: *a natureza da Matemática não se reduz à sua instrumentalidade*.

A estética matemática

A estética da Matemática está nas explicações, nos argumentos que constituem as resoluções dos problemas. Segundo Paul Lockhart¹,

¹Paul Lockhart critica fortemente o modo como a Matemática é normalmente ensinada nas escolas americanas, especialmente devido ao seu formalismo excessivo.

“A primeira coisa que deve ser entendida é que a Matemática é uma arte. A diferença entre ela e as outras artes, tais como a música e a pintura, é que nossa cultura não a reconhece como tal.” “A arte não está na ‘verdade’, mas na explicação, no argumento.² É o argumento em si que dá a verdade seu contexto, e determina o que realmente está sendo dito e o que significa. Matemática é a arte da explicação.” “[Porém,] quando nos concentramos no *que*, e deixamos o *porque*, a Matemática é reduzida a uma casca vazia.”

Paul Lockhart, [10, p.29].

O caráter estético da Matemática é essencial nas discussões sobre o ensino dessa disciplina, especialmente se consideramos uma concepção de educação na qual todo ensinamento deve partir da “experiência da beleza”, como defende Rubem Alves:³

“Se fosse ensinar a uma criança a beleza da música não começaria com partituras, notas e pautas. Ouviríamos juntos as melodias mais gostosas e lhe contaria sobre os instrumentos que fazem a música. Aí, encantada com a beleza da música, ela mesma me pediria que lhe ensinasse o mistério daquelas bolinhas pretas escritas sobre cinco linhas. Porque as bolinhas pretas e as cinco linhas são apenas ferramentas para a produção da beleza musical. A experiência da beleza tem de vir antes.”

Rubem Alves.

A técnica matemática

A técnica matemática constitui um conjunto de atitudes, ideias e métodos necessários para *descobrir, formular e resolver problemas matemáticos*. As atitudes dizem respeito à postura em relação aos problemas matemáticos, cuja resolução requer engajamento e racionalidade. As ideias matemáticas são noções intuitivas fundamentais, tais como *conjunto*, *transformação* e *algoritmo*. Os métodos matemáticos constituem as seguintes modalidades de pensamento:⁴ *indução*, *analogia*, *dedução*, *integração*, *abstração*, *simplificação*, *generalização*, *especialização*, *simbolização*, *representação simbólica*, *pensamento integrativo*, *pensamento desenvolvimentista*.

Todas as atitudes, ideias e modalidades de pensamento matemático são usadas e também desenvolvidas pela aplicação na resolução dos problemas matemáticos, mas considerações teóricas sobre isso são desnecessárias para quem somente deseja aprender ou usar/fazer a Matemática (ao invés de ensinar ou compreender sua epistemologia).

1.1 Sobre como resolver problemas matemáticos

Não existe uma metodologia que nos permita resolver sistematicamente todos os problemas matemáticos: *a resolução de problemas é uma arte que pode e deve ser desenvolvida pela prática*. Contudo, podemos sistematizar a resolução de problemas em termos de diretrizes gerais que sirvam de orientação quanto ao que fazer. Seguindo Polya [12] (e outros que vieram antes e depois dele), podemos dizer que a resolução de um problema matemático segue as seguintes etapas:⁵

1) Interpretação: entendimento do problema, reconhecimento dos tópicos de matemática pertinentes para sua compreensão e resolução.

²Argumentação e resolução de problemas estão intimamente relacionados pelo princípio de que *as soluções dos problemas matemáticos devem ser devidamente justificadas*.

³Esta frase de Rubem Alves é bastante conhecida por pedagogos e educadores, mas dificilmente sua ideia é posta em prática nas aulas de Matemática.

⁴Este conjunto de métodos está baseada na lista de *pensamentos matemáticos relacionados aos métodos matemáticos gerais* de [8, p.51], onde todos os itens são definidos, discutidos e exemplificados (pp.53-85).

⁵Referências sobre o assunto são [5] e [14]. É importante destacar que na prática, essas etapas frequentemente se interpenetram – não sendo tão simples explicar os caminhos do pensamento quanto esta descrição pode sugerir!

- *Nesta etapa, pode ser útil tentar responder as seguintes perguntas:*
- *O que é preciso conhecer para entender e resolver o problema?*
- *Quais são os dados do problema?*
- *O que se quer obter/concluir/saber?*
- *Há hipóteses implícitas, sem as quais o problema não tem sentido ou não fica bem definido?*
- *Etc.*

2) Concepção de uma estratégia: elaboração de uma estratégia para resolver o problema. Nessa etapa, pode ser útil tomar algumas iniciativas preliminares:

- *Lembrar da resolução de algum problema semelhante;*
- *Representar o problema esquematicamente;*
- *Interpretar o problema geometricamente;*
- *Se o problema for genérico, tentar resolver casos especiais/particulares;*
- *Se o problema for específico, tentar resolver o caso genérico;*
- *Se o problema for geométrico, tentar fazer um desenho;*
- *Buscar a solução do problema pela adaptação de uma proposta razoável;*
- *Buscar a solução do problema por “tentativa e erro” (e justificar a solução);*
- *Fazer “engenharia reversa”;*
- *Se to problema for demasiadamente complexo, tentar resolvê-lo progressivamente, partindo de situações simplificadas que são semelhantes ou análogas*
- *Etc.*

3) Execução da estratégia. O trabalho de execução pode variar bastante, dependendo do problema e da estratégia de resolução adotada; ele pode incluir introdução de variáveis, de funções, de incógnitas, elaboração e resolução de equações, referência a resultados conhecidos (teoremas), etc. Geralmente, a execução pode ser organizada em etapas, cada uma delas constituindo um problema específico mais simples; esquematicamente:

- *Para resolver o problema, basta executar as etapas A, B, C,...*
- *Para executar a etapa X, basta executar as etapas X1, X2, X3,...*
- *Etc.*

4) Verificação/Validação. Esta etapa consiste em verificar se está correta a resposta obtida na resolução do problema. Quanto não é possível verificar diretamente a resposta (como quando testamos a suposta solução de uma equação), deve-se analisá-la quanto a sua consistência, coerência e compatibilidade com os dados do problema. Algumas recomendações:

- *Verificar a resposta do problema possui propriedades que podem ser presumidas.*
- *Verificar se resoluções distintas levam a mesma resposta para o problema.*

2 Ensino-aprendizagem

2.1 Fundamentos

Considerando que a essência da Matemática é a *arte de resolver problemas*, devemos focalizar o ensino da Matemática na resolução de problemas, observando sua estética e sua técnica. Cabe citar o depoimento do eminente matemático Paul Halmos:

“Eu acredito que os problemas são o coração da Matemática e espero que nós professores, nas aulas e seminários e nos livros e artigos que escrevermos, enfatizemos isso cada vez mais, e que treinemos nossos estudantes a serem melhores elaboradores e solucionadores de problemas do que nós mesmos somos.”

Halmos, [7].

Assim, não é por acaso que os Parâmetros Curriculares Nacionais também enfatizam a centralidade da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática:

“A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.”

[3, p.33]

As atitudes, ideias e métodos matemáticos podem ser ensinados de diversas maneiras; entretanto, discutiremos aqui duas metodologias de ensino da Matemática que estão centralizadas na descoberta, formulação e resolução de problemas: *Resolução de Problemas* e *Investigação Matemática*.

O que o professor precisa saber para ensinar Matemática?

Elencamos três elementos essenciais necessários para o professor de Matemática conduzir satisfatoriamente o processo de ensino-aprendizagem:

1. virtudes de caráter, o que inclui uma postura respeitosa e ética para com os alunos;
2. conhecimento aprofundado da Matemática que deve ensinar (incluindo sua estética e sua técnica);
3. domínio de metodologias didáticas eficientes, incluindo práticas pedagógicas adequadas para lidar com limitações e dificuldades dos estudantes, que estimulem o desejo de conhecer, maximizem o prazer de estudar, minimizem frustrações e contornem fracassos:

“A maioria das pessoas interessa-se, em alguns momentos, pelo jogo da aprendizagem, se lhes oferecem situações abertas, estimulantes, interessantes. (...) Infelizmente, nem sempre isso bastará, mesmo quando o professor faz tudo o que pode para mobilizar o maior número de alunos. Salvo para alguns, aprender exige tempo, esforços, emoções dolorosas: agústia do fracasso, frustração por não conseguir aprender, sentimento de chegar aos limites, medo do julgamento de terceiros. Para consentir em tal investimento e, portanto, tomar a decisão de aprender e conservá-la, é preciso uma boa razão. O prazer de aprender é uma delas, o desejo de saber é outra.”

Perrenoud, [11, p.69-70].

Um fator fundamental para que o ensino-aprendizagem da Matemática seja satisfatório é o desenvolvimento de uma abordagem equilibrada de quatro dimensões:⁶

- i. *Dimensão conceitual*: diz respeito às noções intuitivas e à formalização dos conceitos, tendo como referência o saber institucionalizado e como paradigma o método axiomático-dedutivo.

⁶Zabala apresenta essas quatro dimensões em [16, pp.53-87], enquanto o Prof. Elon Lages Lima discute detalhadamente as três primeiras dimensões com foco no ensino da Matemática em [9].

- ii. *Dimensão contextual*: refere-se a relação da Matemática com outros saberes, situações cotidianas ou aplicações científicas e tecnológicas. Em particular, significa a proposição ou a resolução de problemas matemáticos contextualizados - dentre os quais estão as aplicações.
- iii. *Dimensão procedimental*: diz respeito à manipulação numérica e algébrica, aos métodos de cálculo e a qualquer procedimento algorítmico.
- iv. *Dimensão atitudinal*: refere-se principalmente às disposições mentais relacionadas à investigação e à resolução de problemas matemáticos, tais como iniciativa, autonomia e senso crítico.

O ensino desequilibrado dessas dimensões torna o aprendizado da Matemática algo *míope*: incapaz de elaborar uma perspectiva adequada sobre sua natureza e utilidade. Em particular, a ênfase demasiada na dimensão procedimental (situação mais comum) tende a tornar o estudo da Matemática tedioso e desinteressante – o que contribui para o desenvolvimento da rejeição que a disciplina sofre dos escolares (e também dos egressos da escola). Segundo Elon Lages Lima,

“A dosagem adequada dessas três componentes é o fator de equilíbrio do processo de aprendizagem.” “Cada tópico apresentado na sala de aula, cada novo assunto tratado no curso, cada tema estudado deve ser visto sob esses três aspectos, o conceitual, o manipulativo e o aplicativo. O professor deve submeter-se ao desafio de compor esse trio a cada nova etapa do seu trabalho.”
Elon Lages Lima, [9, p.177].

2.2 Sobre *Resolução de Problemas*

Conceituação didática de *problema matemático*

O conceito de “*problema*” possui diversas definições no âmbito da Educação Matemática, mas todas convergem para a seguinte:

Problema é uma questão cuja solução não é conhecida e cuja resolução deve ser elaborada criativamente.

Alguns autores conceituam *problema* considerando um componente subjetivo: o engajamento da pessoa em obter uma solução para a situação.

“A situação-problema refere-se à configuração do problema, é estática (por exemplo, o examinador cria uma situação-problema como questão de uma prova). Uma situação-problema só se transforma realmente em um problema quando o indivíduo que se depara com ela é motivado (ou induzido) a transformá-la.” Márcia R. F. de Brito [4].

Na Educação Matemática, *problemas* e *exercícios* têm acepções diferentes, especialmente porque é relativa e dependente do nível de conhecimento de quem tem a tarefa de resolver: o que é *problema* para uma pessoa, pode ser *exercício* para outra. Característico do *exercício* é o conhecimento de um modo preestabelecido de resolvê-lo, podendo ser um algoritmo ou uma técnica padronizada que bastam ser executados. Característico do *problema (matemático)* é o desconhecimento de um método de resolução preestabelecido: sua resolução requer a elaboração e execução de uma *estratégia*, o que depende de *iniciativa*, *criativa* e *conhecimento*.

Skovsmose denominou *paradigma do exercício* um modo (tradicional) de ensinar Matemática que tem como principal característica a ênfase demasiada nos exercícios:

“[A] aula de matemática é dividida em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios seleccionados. (...) Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificação da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma, resposta correcta.” [15]

A metodologia da Resolução de Problemas⁷

A metodologia da Resolução de Problemas fundamenta o ensino da Matemática na resolução de problemas, podendo considerá-los tanto como princípio, meio e fim do processo de ensino-aprendizagem:

“Resolução de Problemas corresponde a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, consequentemente, o que significa aprender.” “[Em síntese, esta metodologia] baseia-se na proposição e no enfrentamento do que chamaremos de situação-problema.” M.I. Diniz, [6, p.89].

Uma atividade ou sequência didática baseada na Resolução de Problemas pode ser desenvolvida nas seguintes etapas:⁸

- i. proposição do problema (pelo professor);
- ii. interpretação e resolução do problema (pelos alunos sob supervisão do professor);
- iii. comunicação e discussão dos resultados (pelos alunos sob supervisão do professor);
- iv. formalização conceitual (pelo professor).

2.3 Sobre *Investigação Matemática*

A metodologia de Investigação Matemática é caracterizada pela proposição de situações abertas em que os estudantes são instigados a explorar a situação, descobrir padrões e formular problemas antes de tentar resolvê-los.

Uma sequência didática baseada na Investigação Matemática desenvolve-se habitualmente nas seguintes etapas [13, p.25]:

- i. proposição da tarefa, na qual o professor apresenta uma situação que suscita questionamentos nos estudantes;
- ii. investigação, na qual os estudantes elaboram e buscam solucionar suas questões;
- iii. discussão dos resultados, em que os alunos comunicam suas iniciativas, desenvolvimentos e conclusões aos colegas;
- iv. síntese teórica.

Na aula de investigação Matemática, o professor é responsável tanto pela introdução da tarefa quanto pelo seu desenvolvimento, durante o qual supervisiona, incentiva e orienta a ação dos alunos:

“Existe, por vezes, a ideia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo.” [13, p.26]

⁷Registramos a distinção entre os termos resolução de problemas (com iniciais minúsculas) e Resolução de Problemas (com iniciais maiúsculas): a primeira designa a ação de quem busca obter a solução de um dado problema, a segunda designa uma metodologia didática.

⁸Allevato-Onuchic em [1, p.45] apresentam a seguinte sequência de 10 etapas que podem se sobrepor, da qual a nossa pode ser considerada uma síntese sequencial do que é fundamental: (i) proposição do problema, (ii) leitura individual, (iii) leitura em conjunto, (iv) resolução do problema [pelos alunos], (v) observação e incentivo [pelo professor], (vi) comunicação e discussão das resoluções, (vii) plenária, (viii) busca do consenso, (ix) formalização do conteúdo, (x) proposição e resolução de novos problemas.

Para ilustrar, apresentamos como exemplo a seguinte *tarefa investigativa*:

Tarefa investigativa: *Descobrimo um padrão nas somas de noyes.*

Explore a seguinte sequência de cálculos:

$$\begin{array}{rcl} 9 + 1 & = & \text{-----} \\ 9 + 9 + 2 & = & \text{-----} \\ 9 + 9 + 9 + 3 & = & \text{-----} \end{array}$$

- 1) Efetue as somas indicadas.
- 2) Você percebe algum padrão?
- 3) É possível extender a regularidade?
- 4) Você consegue explicar o fenômeno?

Observação 1 *Atividades investigativas desse tipo são utilizadas com sucesso no Japão, onde é preconizada uma abordagem similar chamada Abordagem pela Resolução de Problemas, que tem como princípio básico "nutrir o aprendizado da matemática pelas crianças por si mesmas." [8, p.3]*

A Como está a educação matemática no Brasil?

Exames aplicados em nível nacional e internacional (tais como a Prova Brasil, o ENEM e o PISA) mostram que o ensino da Matemática não tem sido satisfatório no Brasil. A situação é discutida nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

“O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem. (...) A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama.”
[3, p.15]

Por que isso? Decorre das características intrínseca da Matemática? Falta aos alunos interesse? Falta aos professores competência?

Certamente, o fracasso do ensino escolar da Matemática decorre de uma conjunção de fatores, apenas alguns dos quais sob controle dos professores – por isso, é importante sabermos quais são e como podemos lidar com eles para melhorar o processo de ensino-aprendizagem. Há traços que tipificam a maioria dos casos (cujos detalhes dependem de cada situação, de cada professor e cada turma): *o ensino de Matemática comumente realizado é dogmático e fragmentado, não oportuniza descobertas e condiciona uma postura passiva, está baseado na memorização ao invés de no desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas, investigação e argumentação.*

Focalizando o professor, citamos novamente os Parâmetros Curriculares Nacionais:

“Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho. / Tais problemas acabam sendo responsáveis por muitos equívocos e distorções em relação aos fundamentos norteadores e idéias básicas que aparecem em diferentes propostas.”
[3, p.22]

Almeida e Lima em [2] corroboram a posição dos PCNs num estudo recente sobre a formação inicial em Matemática dos pedagogos, no qual concluem que

“a formação ofertada no curso de Pedagogia relega a formação matemática para o segundo plano, sendo totalmente insuficiente para atender as necessidades da formação inicial.”
Almeida e Lima [2]

Terminamos concluindo pela necessidade de melhorar o tratamento da Matemática na formação inicial de professores, bem como pela necessidade de formação continuada na área.

References

- [1] ALLEVATO, Norma S.G., ONUCHIC, Lourdes de la Rosa: *Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?* IN: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa *et.al.* (org): *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. Paco Editorial: Jundiaí, 2014: pp.35-52.
- [2] ALMEIDA, Marlisa B., LIMA, Maria das Graças de: *Formação inicial de professores e o curso de Pedagogia: reflexões sobre a formação matemática*. Ciência & Educação (Bauru), 01/01/2012. DOI:10.1590/S1516-73132012000200014. URL: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132012000200014 (Acessado em 15/04/2015).
- [3] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental: Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino de Primeira a Quarta Séries. MEC/SEF: Brasília, 1997.
- [4] BRITO, Márcia R. F.: *Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos*. In: Márcia R. F. de Brito: *Solução de problemas e a matemática escolar*. Editora Alínea: São Paulo - SP, 2010: pp.15-53.
- [5] DANTE, Luiz R.: *Didática da resolução de problemas de matemática - 9. ed.* Ática: São Paulo, 1997.
- [6] DINIZ, Maria I.: *Resolução de Problemas e Comunicação*. In: Kátia S. Smole, Maria I. Diniz: *Ler, Escrever e Resolver Problemas: Habilidades Básicas para Aprender Matemática*. Editora Artmed: Porto Alegre - RS, 2001: pp.87-97.
- [7] HALMOS, Paul: *The Heart of Mathematics*. The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 7 (1980): pp. 519-524.
- [8] ISODA, Masami, KATAGIRI, Shigeo: *Mathematical Thinking: How to Develop It in the Classroom*. World Scientific: Singapura, 2012.
- [9] LIMA, Elon L.: *Matemática e Ensino* (Coleção Professor de Matemática). SBM: Rio de Janeiro, 2003.
- [10] LOCKHART, Paul: *Mathematician's Lament*. Bellevue Literary Press: New York, 2009.
- [11] PERRENOUD, P.: *Dez Novas Competências para Ensinar*. Artmed: Porto Alegre, 2000.
- [12] POLYA, George: *A Arte de Resolver Problemas - 3a. edição*. Interciência: Rio de Janeiro, 1995.
- [13] PONTE, João P. da, BROCARD, Joana, OLIVEIRA, Hélia: *Investigações Matemáticas na Sala de Aula - 3a. edição, revista e ampliada*. Autêntica: São Paulo, 2013.
- [14] POZZO, Juan I.: *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Arned: Porto Alegre, 1998.
- [15] SKOVSMOSE, Ole: *Cenários para investigação*. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p.66-91, 2000.
- [16] ZABALA, Antoni: *A Prática Educativa: Como Ensinar*. Editora Artmed: Porto Alegre, 1998.