

ÂNGULOS

1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

1.1 Notação de ponto, reta e plano:

a) Letras:

Ponto: letras maiúsculas: A, B, C,...

Reta: letras minúsculas: a, b, c...

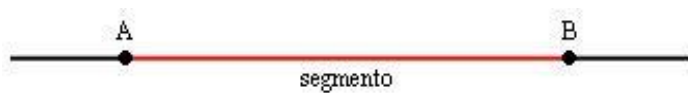
Plano: letras gregas minúsculas: α , β , γ ,...

b) Gráficas:



1.2 Segmento de reta

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é o segmento de reta.



O segmento de reta AB é indicado por $\overline{AB}$.

1.3 Semi-reta

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X, tais que B está entre A e X é a semi-reta AB (indicada por $\overrightarrow{AB}$).

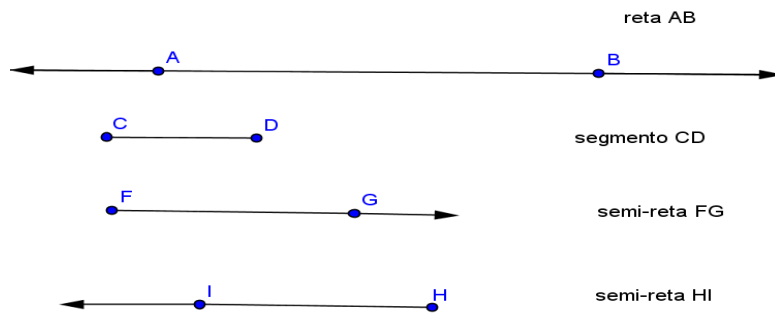
A é a origem da semi-reta $\overrightarrow{AB}$:



$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \text{ tal que } B \text{ está entre } A \text{ e } X\}$$

1.4 Resumo:

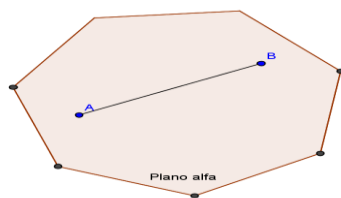
Considerando dois pontos distintos:



2 ÂNGULOS

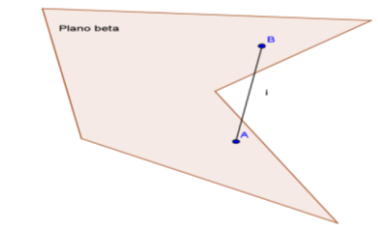
2.1 Região convexa:

Um plano α (alfa) é uma região convexa, quando dois pontos A e B, distintos de α , tem um segmento AB contido em α .



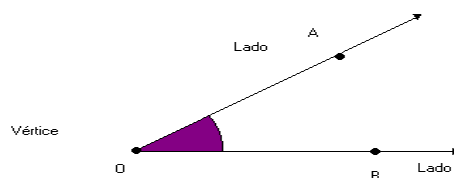
2.2 Região côncava

Se uma região não é convexa, ela é uma região côncava.



2.3 Definição de ângulo

É a reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).



$$\widehat{AOB} = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

O ponto O é o vértice do ângulo.

As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

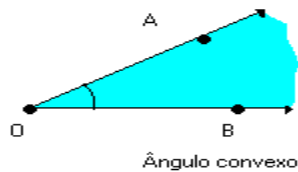
2.4 Interior do ângulo

O interior do ângulo $A\hat{O}B$ é a interseção dos dois semiplanos.

O interior do ângulo é convexo.

Os pontos do interior de um ângulo são os pontos internos do ângulo.

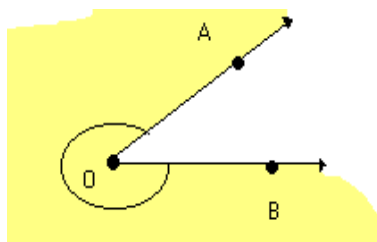
A reunião de um ângulo com o seu interior é um setor angular ou ângulo convexo, também conhecido por “ângulo convexo”.



2.5 O exterior do ângulo

É o conjunto dos pontos que não pertencem ao ângulo $A\hat{O}B$ nem ao seu interior.

O exterior do ângulo é côncavo.

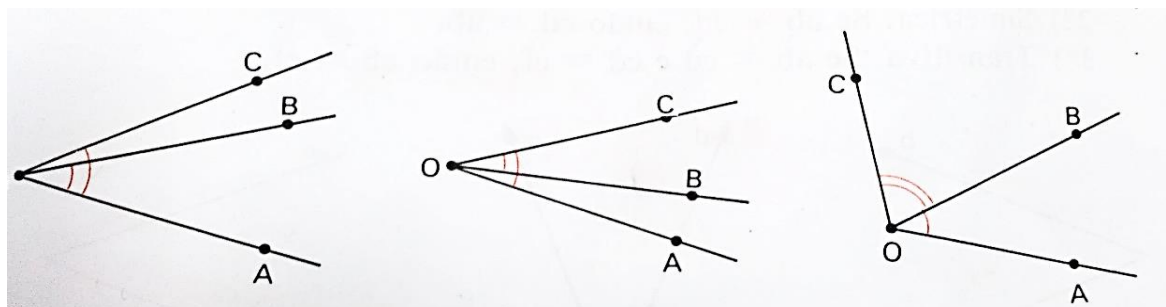


Os pontos do exterior de um ângulo são chamados externos ao ângulo.

A reunião do ângulo com o seu exterior também é conhecida por “ângulo côncavo”.

2.6 Ângulos consecutivos

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles é também lado do outro (um lado de um deles coincide com um ao lado do outro).



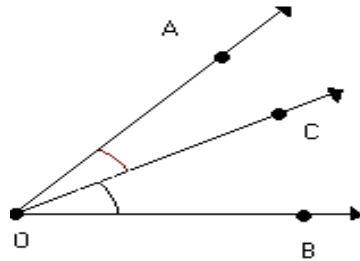
$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ são consecutivos ($\overrightarrow{OA}$ é o lado comum).

$A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos ($\overrightarrow{OC}$ é o lado comum).

$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos ($\overrightarrow{OB}$ é o lado comum).

2.7 Ângulos adjacentes

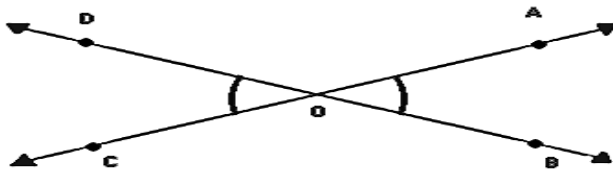
Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não tem pontos internos em comum.



$\widehat{AÔC}$ e $\widehat{CÔB}$ são adjacentes.

2.8 Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.



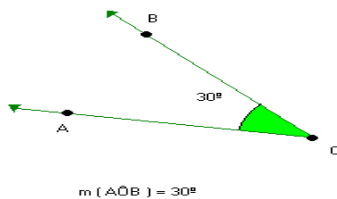
$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são opostas.

$\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são opostas.

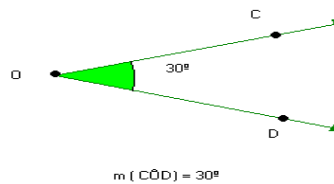
$\widehat{AÔB}$ e $\widehat{CÔD}$ são opostos pelo vértice.

2.9 Ângulos congruentes

São ângulos com a mesmas medidas. Se $m(\widehat{AÔB}) = m(\widehat{CÔD})$ os ângulos são congruentes.



$m(\widehat{AÔB}) = 30^\circ$

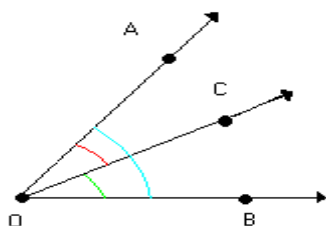


$m(\widehat{CÔD}) = 30^\circ$

$\widehat{AÔB}$ é congruente a $\widehat{CÔD}$ ($\widehat{AÔB} \equiv \widehat{CÔD}$).

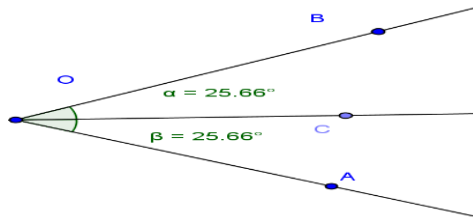
2.10 Adição de ângulos

Se a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é interna ao ângulo $\widehat{AÔB}$, o ângulo $\widehat{AÔB}$ é a soma dos ângulos $\widehat{AÔC}$ e $\widehat{CÔB}$.



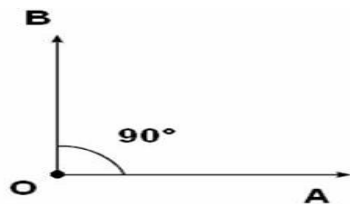
2.11 Bissetriz de um ângulo

Uma semi-reta $\overrightarrow{OC}$ interna a um ângulo $\widehat{AOB}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$ se, e somente se, $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$.

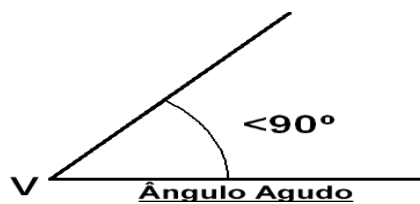


2.12 Ângulo reto, agudo e obtuso

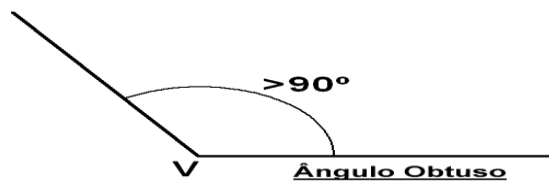
Ângulo reto: É todo ângulo de 90° . O ângulo reto é congruente a seu suplementar adjacente.



Ângulo agudo: É todo ângulo menor que 90° .

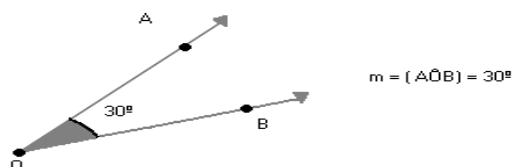


Ângulo obtuso: É todo ângulo maior que o reto (90°).

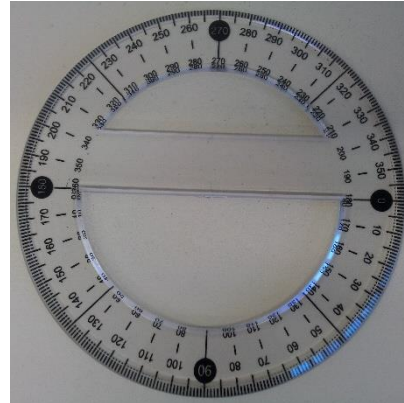
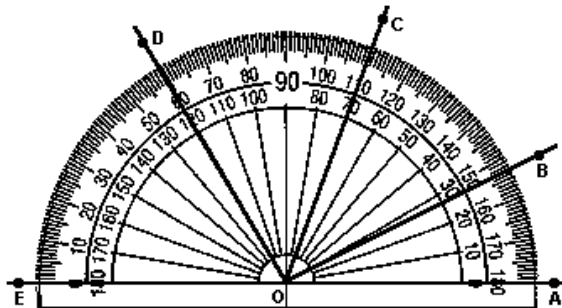


2.13 Medida de um ângulo

A medida (amplitude) de um ângulo $\widehat{AOB}$ é indicada por $m(\widehat{AOB})$.



O transferidor é um objeto capaz de medir o valor do ângulo. Existem dois tipos: meia volta (180°) e volta inteira (360°).



2.14 Unidades de medidas de ângulos

Grau ($^\circ$):

Um grau é o ângulo equivalente a ($1/90^\circ$) do ângulo reto (90°).

Ângulo de um grau= (ângulo reto/ 90°)

Submúltiplos do grau:

Minuto ($'$): Equivale a $1/60$ de um grau. ($1' = 1^\circ/60$)

Segundo ($''$): Equivale a $1/60$ de um minuto. ($1'' = 1' /60$)

Resumindo:

1 grau (1°) tem 60 minutos($60'$). ($1^\circ = 60'$)

1 minuto ($1'$) tem 60 segundos($60''$) ($1' = 60''$)

1 grau (1°) tem 3600 segundos ($3600''$) ($1^\circ = 3600''$)

Radiano (rad)

Chama-se radiano (rad) todo arco de circunferência cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém,

O ângulo de um radiano (1 rad) equivale $\frac{360^\circ}{2\pi}$.

$$1 \text{ radiano} \approx 57^\circ 17' 45'' \text{ e } 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \approx 0,011745 \text{ rad}$$

Grado (gr)

O ângulo de um grado (1 gr) equivale a $1/100$ do ângulo reto.

Ângulo de 1 grado= (ângulo reto/ 100)

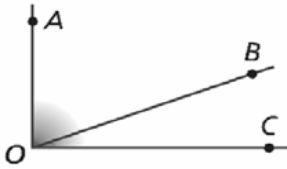
Submúltiplos de grau:

Centígrado: equivale a $1/100$ do grau ($0,001$ gr).

Decimigrado: equivale a $1/100$ do centígrado ($0,0001$ gr).

2.15 Ângulos complementares.

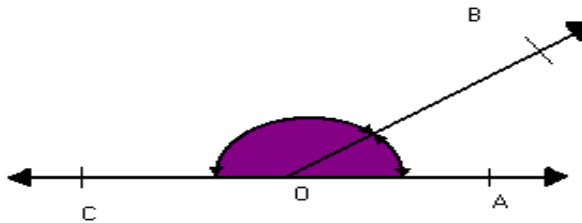
Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma das suas medidas é 90° . Um deles é complemento do outro.



$$\hat{AOB} + \hat{BOC} = 90^\circ \quad \text{Então } \hat{AOB} = 90^\circ - \hat{BOC} \quad \text{ou } \hat{BOC} = 90^\circ - \hat{AOB}.$$

2.16 Ângulos suplementares

Quando a soma das suas medidas for igual a 180° .



Se x é ângulo então $(180^\circ - x)$ é o suplemento desse ângulo.

$$\hat{AOB} + \hat{BOC} = 180^\circ \quad \text{Então } \hat{AOB} = 180^\circ - \hat{BOC} \quad \text{ou } \hat{BOC} = 180^\circ - \hat{AOB}.$$

2.17 Ângulo nulo

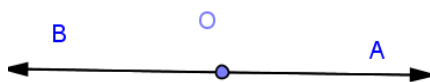
Os lados do ângulo são coincidentes ($\hat{AOB} = 0$).

$$\hat{AOB} = 0$$



2.18 Ângulo raso

Os lados são semi-retas opostas.

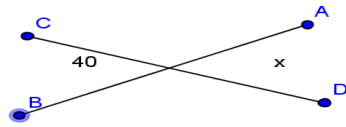


$$\hat{AOB} = 180^\circ$$

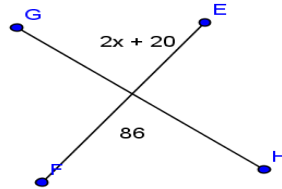
Atividades de fixação

1) Dois ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) são sempre congruentes, calcule o valor de x nos casos abaixo:

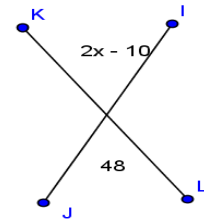
a)



b)



c)



2) Determinar as somas dos ângulos:

- a) $30^{\circ} 40' + 15^{\circ} 35'$
- b) $10^{\circ} 30' 45'' + 15^{\circ} 29' 20''$

3) Determine as diferenças entre os ângulos:

- a) $20^{\circ} 50' 45'' - 5^{\circ} 45' 30''$
- b) $90^{\circ} - 50^{\circ} 30' 45''$

4) Calcule o complemento dos seguintes ângulos:

- a) 35°
- b) $26^{\circ} 20'$
- c) $30^{\circ} 20' 15''$

5) Calcule o suplemento dos seguintes ângulos:

- a) 65°
- b) $120^{\circ} 10'$
- c) $25^{\circ} 10' 40''$

6) Determine os produtos dos ângulos:

- a) $3x (10^{\circ} 35' 45'')$
- b) $5x (5^{\circ} 15' 30'')$

7) Determine as divisões dos ângulos:

- a) $(46^{\circ} 48' 54'') : 2$

b) $(52^\circ 63' 42'') : 5$

8) Dado um ângulo de medida α (alfa), indique:

a) O seu complemento:

b) O dobro de seu complemento:

c) Um quarto do seu complemento:

d) O seu suplemento:

e) Um terço do seu suplemento:

f) Metade do seu suplemento:

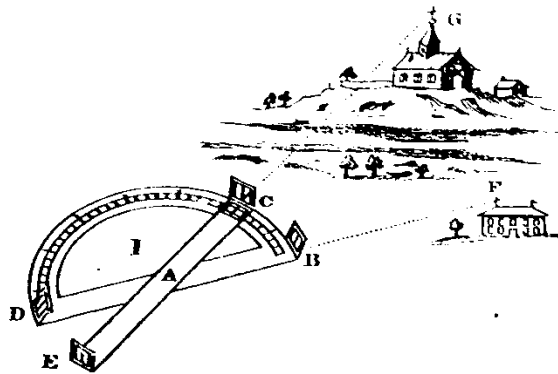
9) Dê a medida do ângulo que vale o dobro do seu complemento:

10) Qual é o ângulo que excede o seu complemento em 76° ?

11) Vamos estudar um pouco de História da Matemática e ver como os ângulos eram trabalhados nos livros didáticos antigos. Você conhece o grafômetro?

O grafômetro é um aparelho usado para medir ângulos. O aparelho foi usado no século XVIII para resolver a seguinte questão: O que devemos fazer para determinar os graus contidos num ângulo que se quer medir?

A figura a seguir ilustra o problema.



O instrumento é composto de duas réguas, EAC, DAB, de igual comprimento, que se cruzam em A.

As réguas possuem pínulas em suas extremidades que servem com uma espécie de mira. A régua EC, chamada alidade, é móvel em torno de A.

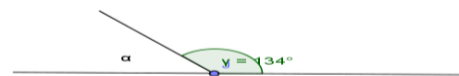
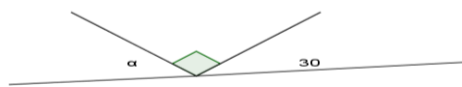
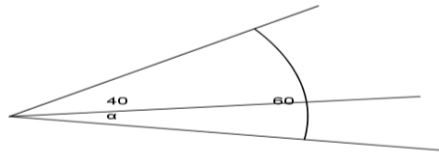
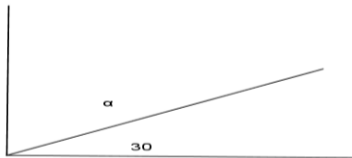
A outra régua DB é fixa serve de diâmetro ao semi-círculo DAB, dividido em 180 graus.

Se quiser conhecer o ângulo formado pelas duas linhas imaginárias tiradas dos lugares onde estiverem os dois objetos quaisquer F e G, colocamos a régua fixa DAB, de modo que o olho posto em D aviste

um dos objetos F pelas duas pínulas D e B; em seguida sem mexer no instrumento, gira-se a alidade até que o olho, assentado em E, aviste o outro objeto G pelas pínulas E e C.

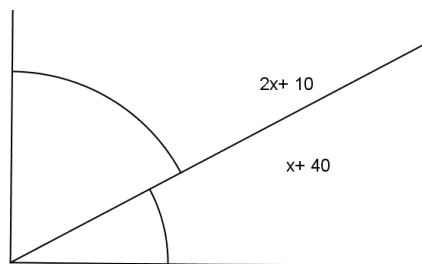
A 'alidade' então marca no semi-círculo graduado o número de graus contidos pelo ângulo proposto GAF.

12) Determine o valor do ângulo desconhecido nos casos abaixo:

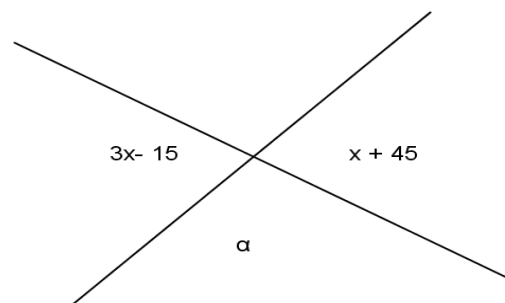


13) Determine o valor do x nos casos abaixo:

a)

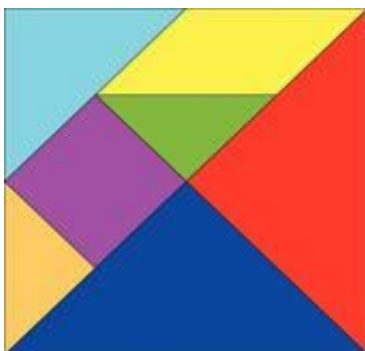


b)



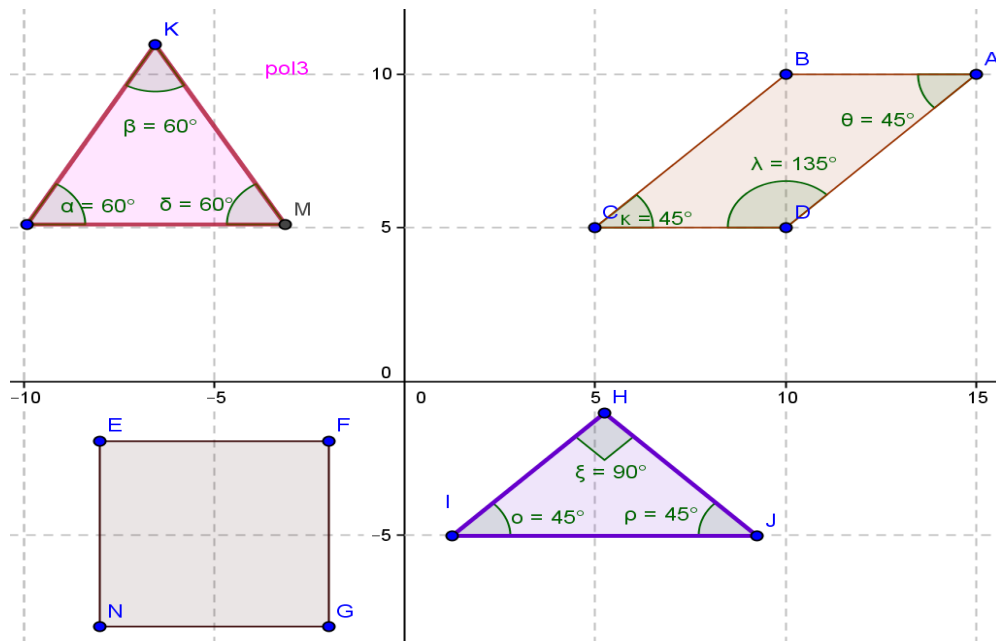
14) Usando as peças do Tangram determinar:

- As medidas dos ângulos internos de cada objeto geométrico do Tangram;
- Calcular a soma dos ângulos internos das formas geométricas.
- Qual é a única figura geométrica do Tangram que tem ângulo obtuso? Qual é o valor desse ângulo?



15) Usando o programa GEOGEBRA construa um triângulo equilátero, um paralelogramo, um quadrado, um triângulo isósceles. Observe os ângulos formados pelos seus lados e classifique cada um deles.

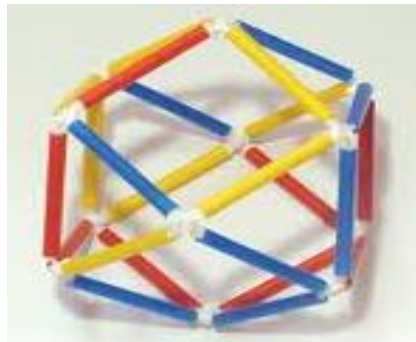
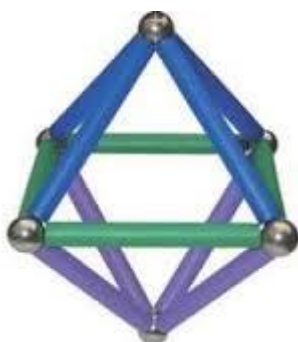
Obs.: A ilustração a seguir mostra os objetos solicitados, mas a tarefa é criar diferentes formatos de acordo com a criatividade de cada um.



ATIVIDADES COM O GEOLIG

O Geolig é um brinquedo de montar altamente educativo, é composto por tubos coloridos (arestas) interligados por conectores de plástico de 3, 4, 5 e 6 pontas (vértices).

Com o Geolig pode-se montar variadas figuras e modelos de sólidos geométricos, pois pode-se fazer além dos triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos... que a forma fica estruturada.



É um material excelente para uso na explanação da Geometria Plana e Espacial.

Vamos montar figuras planas e observar os ângulos internos a cada uma delas.

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

- Com as peças menores, duas a duas, montar um triângulo equilátero;
- Qual é o tipo de ângulo que estão no interior do triângulo equilátero?

TRIÂNGULO ISÓSCELES

Construa um triângulo isósceles (dois lados iguais) e identifique os tipos de ângulos.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

- Usando as peças menores monte um triângulo retângulo com 12 peças.
- Quais são os tipos de ângulos que estão no interior do triângulo?
- Estime as medidas de cada um destes ângulos e ordene de forma crescente.
- Retire uma peça do lado médio do triângulo e observe se o ângulo aumenta ou diminui.

QUADRADO

- Montar um quadrado e identificar os valores dos ângulos internos do quadrado.
- Deforme os ângulos e observe o que acontece.

PARALELOGRAMO

- Montar um paralelogramo e identificar os tipos de ângulos internos.
- Faça deformações nos ângulos do paralelogramo, observe e comente o que acontece.