

Aritmética:

elementos teóricos e tópicos didáticos

Lúcio Fassarella

Universidade Federal do Espírito Santo

lucio.fassarella@ufes.br

8 de maio de 2015



Sumário

- 1 Números
 - O que é número?
 - Compreensão Numérica
 - Contagem e Sistema de Numeração Decimal
- 2 Adição e Subtração
 - Situações-problema
 - Atividades de investigação
- 3 Multiplicação e Divisão
 - Situações-problema
 - Atividades de investigação
- 4 Cálculo Mental
 - Conceituação de cálculo mental
 - Atividades de cálculo mental
- 5 Referências



NÚMEROS



O que é número?

Os números são os resultados de medidas de quantidades discretas ou contínuas. Mais precisamente,



O que é número?

Os números são os resultados de medidas de quantidades discretas ou contínuas. Mais precisamente,

Os números naturais resultam das medidas de quantidades discretas, *i.e.*, que podem ser contadas (identificadas sequencialmente).



O que é número?

Os números são os resultados de medidas de quantidades discretas ou contínuas. Mais precisamente,

Os números naturais resultam das medidas de quantidades discretas, *i.e.*, que podem ser contadas (identificadas sequencialmente).

Os números reais resultam das medidas de quantidades contínuas, sendo essas medidas obtidas pela comparação com alguma unidade padronizada: comprimento, área, volume, tempo, etc.



O que é número?

Embora uma definição de número seja interessante e até mesmo teoricamente útil, o entendimento do conceito de número é desenvolvido somente pela experiência refletida:



O que é número?

Embora uma definição de número seja interessante e até mesmo teoricamente útil, o entendimento do conceito de número é desenvolvido somente pela experiência refletida:

“As pesquisas em educação (...) têm mostrado que o número não é empírico, por natureza; a criança o constrói através da abstração reflexiva, pela sua própria ação mental de colocar coisas em relação.”

[Berton-Itacarambi (2009), pp.15-16]



O que é número?

Mesmo na Análise, os números são considerados conceitos primitivos – i.e. formalmente caracterizados apenas por suas propriedades:

“Do ponto de vista de Peano, os números naturais não são definidos. É apresentada uma lista de propriedades gozadas por eles (os axiomas) e tudo o mais decorre daí. Não interessa o que os números são; (isto seria mais um problema filosófico) o que interessa é como eles se comportam.”

[Lima (1992), p.25]



O que é número?

Em síntese, uma pessoa pode adquirir uma compreensão razoável da Matemática sem nunca ter se deparado com uma definição de número – e sem nunca ter precisado de alguma.



O que é número?

Em síntese, uma pessoa pode adquirir uma compreensão razoável da Matemática sem nunca ter se deparado com uma definição de número – e sem nunca ter precisado de alguma.

Fundamental é conhecer as propriedades dos números, ter a habilidade de reconhecê-los em contextos variados e saber usá-los para interpretar situações, comunicar ideias e formular e resolver problemas.



O que é número?

Em síntese, uma pessoa pode adquirir uma compreensão razoável da Matemática sem nunca ter se deparado com uma definição de número – e sem nunca ter precisado de alguma.

Fundamental é conhecer as propriedades dos números, ter a habilidade de reconhecê-los em contextos variados e saber usá-los para interpretar situações, comunicar ideias e formular e resolver problemas.

Numeralização, compreensão numérica ou (com alguma distinção) **sentido de número** são termos usados para designar o conhecimento articulado e funcional da ideia de *número*.



COMPREENSÃO NUMÉRICA



Numeralização



Numeralização

“Ser numeralizado requer familiaridade com o mundo dos números, pensar matematicamente em situações diversas, empregando sistemas eficientes de representação e compreendendo as regras lógicas que regem os conceitos matemáticos inseridos nessas situações. (...) Segundo nossa interpretação, tornar-se numeralizado é algo que está fortemente relacionado ao que a literatura tem denominado sentido de número.” “Relevante ressaltar que o sentido de número não se trata de um conceito matemático específico. O sentido de número (...) refere-se à habilidade de lidar, de forma eficiente e flexível, com situações cotidianas extraescolares que incluem números e quantidades.”

[Spinillo (2010), p.85, p.86]



Compreensão Numérica



Compreensão Numérica

“Compreensão numérica refere-se a uma intuição sobre números e seus vários usos e interpretações; uma apreciação de vários níveis de exatidão quando estimado; à habilidade para detectar erros aritméticos, e ao uso do senso-comum ao trabalhar com números. Compreensão numérica não é uma entidade finita que o aluno possui ou não, nem uma unidade curricular que pode ser ensinada e depois deixada de lado. Acima de tudo, a compreensão numérica é caracterizada por uma intenção de construir sentido para as situações numéricas. Compreensão numérica é uma forma de pensar que deve permear todos os aspectos do ensino e aprendizagem da matemática, se a matemática é algo que deva fazer sentido.”

Reys et al., *pud* [Spinillo (2010), pp.86]



Sentido de Número



Sentido de Número

“O sentido do número, neste texto, refere-se à capacidade de usar os números e os métodos quantitativos como meio de comunicação, processamento e interpretação da informação. Resulta na expectativa da utilidade dos números e de certa regularidade matemática, ou seja, de adquirir uma compreensão global dos números e das operações e utilizá-las para analisar situações-problema e desenvolver estratégias úteis para resolvê-las. (...) O conceito de número não pode ser ensinado, é construído pelas crianças pela sua capacidade natural de pensar. E, da mesma forma, a adição não é ensinada, a própria construção do número envolve a repetida adição de mais um, o princípio aditivo.”

[Berton-Itacarambi (2009), pp.15–16]



Ensino-aprendizagem dos números

A recomendação didática genérica para desenvolver numeralização na escola consiste em variar as situações didáticas, variar os suportes usados para lidar com os números e postergar o ensino dos algoritmos aritméticos para quando a intuição numérica estiver razoavelmente bem desenvolvida.



Ensino-aprendizagem dos números

A recomendação didática genérica para desenvolver numeralização na escola consiste em variar as situações didáticas, variar os suportes usados para lidar com os números e postergar o ensino dos algoritmos aritméticos para quando a intuição numérica estiver razoavelmente bem desenvolvida.

Noutras palavras, no ensino das operações aritméticas é importante envolver os alunos em situações em quantidade e qualidades suficientes para que eles possam refletir e consolidar sua compreensão acerca dos seus significados e relações.



Ensino-aprendizagem dos números

A recomendação didática genérica para desenvolver numeralização na escola consiste em variar as situações didáticas, variar os suportes usados para lidar com os números e postergar o ensino dos algoritmos aritméticos para quando a intuição numérica estiver razoavelmente bem desenvolvida.

Noutras palavras, no ensino das operações aritméticas é importante envolver os alunos em situações em quantidade e qualidades suficientes para que eles possam refletir e consolidar sua compreensão acerca dos seus significados e relações.

O professor tem uma tripla responsabilidade: (i) preparar as aulas visando uma aprendizagem significativa, (ii) avaliar o aprendizado e (iii) tomar iniciativas para contornar eventuais dificuldades de aprendizagem.



Ensino-aprendizagem dos números

A supervisão do professor é fundamental ao longo de todo processo de ensino-aprendizagem das operações aritméticas, especialmente na fase inicial:

“Os alunos dos dois primeiros anos [do Ensino Fundamental] ao se depararem com situações novas precisam do apoio e orientação do professor que deverá ajudá-los a analisar, interpretar e optar por procedimentos para resolver as situações-problema. Os procedimentos utilizados pelos alunos ao resolver problemas podem resultar de experiências e aprendizados anteriores e serem aperfeiçoados com a mediação do professor.”



Ensino-aprendizagem dos números

A supervisão do professor é fundamental ao longo de todo processo de ensino-aprendizagem das operações aritméticas, especialmente na fase inicial:

“Os alunos dos dois primeiros anos [do Ensino Fundamental] ao se depararem com situações novas precisam do apoio e orientação do professor que deverá ajudá-los a analisar, interpretar e optar por procedimentos para resolver as situações-problema. Os procedimentos utilizados pelos alunos ao resolver problemas podem resultar de experiências e aprendizados anteriores e serem aperfeiçoados com a mediação do professor.”

“É importante nesta fase que eles compreendam alguns dos significados da multiplicação e da divisão e utilizem estratégias pessoais, sem a necessidade do uso de técnicas operatórias convencionais.”

[Berton-Itacarambi (2009), pp.97]



Ensino-aprendizagem dos números

A ênfase precoce e exagerada nos algoritmos de cálculo tende a prejudicar o aprendizado:

“Muitas vezes constatamos que a prática pedagógica nas séries iniciais se centra na aritmética, em especial, no ensino dos algoritmos desprovidos de significados, e não privilegia a questão conceitual, e as ideias presentes nas operações básicas. Tais práticas acabam por consolidar uma matemática escolar reducionista, que não possibilita o pensar e o fazer matemático em sala de aula.” [Como consequência,] “o que se observa, muitas vezes, é a falta de autonomia do aluno diante de uma situação-problema: ele se limita a esperar que a professora diga qual é a operação que deve ser feita ou, então, atira-se a fazer uma série de algoritmos totalmente desvinculados do contexto.”

[Nacarato-Mengali-Passos (2011), pp.89]



Ensino-aprendizagem dos números

Três princípios para o ensino-aprendizagem dos números:



Ensino-aprendizagem dos números

Três princípios para o ensino-aprendizagem dos números:

- **Desenvolver a intuição numérica** antes de ensinar os algoritmos aritméticos.



Ensino-aprendizagem dos números

Três princípios para o ensino-aprendizagem dos números:

- **Desenvolver a intuição numérica** antes de ensinar os algoritmos aritméticos.
- **Contextualizar o ensino dos algoritmos**, para que seu aprendizado seja motivado e significativo.



Ensino-aprendizagem dos números

Três princípios para o ensino-aprendizagem dos números:

- **Desenvolver a intuição numérica** antes de ensinar os algoritmos aritméticos.
- **Contextualizar o ensino dos algoritmos**, para que seu aprendizado seja motivado e significativo.
- **Abordar simultaneamente os pares de operações adição-subtração e multiplicação-divisão**, considerando que os elementos de cada par de operações estão intimamente relacionadas tanto nos seus significados quanto nos seus algoritmos de cálculo.



Ensino-aprendizagem dos números

Três princípios para o ensino-aprendizagem dos números:

- **Desenvolver a intuição numérica** antes de ensinar os algoritmos aritméticos.
- **Contextualizar o ensino dos algoritmos**, para que seu aprendizado seja motivado e significativo.
- **Abordar simultaneamente os pares de operações adição-subtração e multiplicação-divisão**, considerando que os elementos de cada par de operações estão intimamente relacionadas tanto nos seus significados quanto nos seus algoritmos de cálculo.

Essas orientações são sustentadas por alguns pesquisadores na área da Educação Matemática.



Ensino-aprendizagem dos números

“As situações de ensino poderiam integrar diferentes sistemas e suportes de representação que poderiam coexistir simultaneamente durante o processo de resolução: o aluno poderia combinar representações simbólicas (números, linguagem natural), representações icônicas (tracinhos, pontinhos, setas) e representações gráficas variadas (desenhos, diagramas, tabelas) e, ao mesmo tempo, utilizar-se de materiais concretos. Assim, ao ser instruído sobre esses conceitos, o aluno estaria desenvolvendo uma boa intuição sobre números, suas relações, usos e diferentes formas de representação. As regras, o emprego de algoritmos, os cálculos precisos poderiam ser introduzidos posteriormente.”

[Spinillo (2010), pp.104-105]



Ensino-aprendizagem dos números

“As operações devem estar sempre contextualizadas, para que os algoritmos não se tornem vazios de significado, por não estarem traduzindo situações que possuem sentido e nem uma situação-problema em que a criança esteja desafiada a resolver.”

[Fontes (2010), p.49]



Ensino-aprendizagem dos números

Os PCNs destacando o ensino conjunto das operações de multiplicação e divisão:

“Para desenvolver uma compreensão mais ampla da multiplicação, é necessário trabalhar paralelamente multiplicação e divisão.”

[Brasil (1998), p.109]



Ensino-aprendizagem dos números

Os significados das operações podem ser trabalhados de modo intuitivo com material concreto, e.g., Ábaco, Material Dourado, Escala Cuisinaire, etc.



Ensino-aprendizagem dos números

Os significados das operações podem ser trabalhados de modo intuitivo com material concreto, e.g., Ábaco, Material Dourado, Escala Cuisinaire, etc.

Em qualquer nível de ensino, sempre que um aluno demonstrar incompreensão ou confusão quanto aos significados das operações aritméticas, podemos recorrer a tais recursos para dar esclarecimentos.



Ensino-aprendizagem dos números

Os significados das operações podem ser trabalhados de modo intuitivo com material concreto, e.g., Ábaco, Material Dourado, Escala Cuisinaire, etc.

Em qualquer nível de ensino, sempre que um aluno demonstrar incompreensão ou confusão quanto aos significados das operações aritméticas, podemos recorrer a tais recursos para dar esclarecimentos.

Vale lembrar de uma das leis da boa performance (em qualquer atividade):
Devemos sempre retornar aos fundamentos.



CONTAGEM E SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL



Contagem

Embora contar signifique medir o tamanho de um conjunto finito, o processo de contagem é normalmente realizado com base na ordenação dos números naturais, definida pela sequência

1, 2, 3, ...



Contagem

Embora contar signifique medir o tamanho de um conjunto finito, o processo de contagem é normalmente realizado com base na ordenação dos números naturais, definida pela sequência

$$1, 2, 3, \dots$$

(Isso significa que os conceitos de *número natural cardinal* e *número natural ordinal* estão intimamente relacionados: efetivamente, contamos um conjunto finito ordenando seus elementos.)



Contagem

Entretanto, memorizar a sequência (ordem) dos números naturais não significa possuir uma compreensão útil desses números:



Contagem

Entretanto, memorizar a sequência (ordem) dos números naturais não significa possuir uma compreensão útil desses números: para tanto, é *necessário saber usar os números para comparar as quantidades de elementos de conjuntos finitos, de modo a poder concluir se têm a mesma quantidade de elementos, ou se um dos conjuntos tem mais elementos do que outro.*



Contagem

Entretanto, memorizar a sequência (ordem) dos números naturais não significa possuir uma compreensão útil desses números: para tanto, *é necessário saber usar os números para comparar as quantidades de elementos de conjuntos finitos, de modo a poder concluir se têm a mesma quantidade de elementos, ou se um dos conjuntos tem mais elementos do que outro.*

Podemos testar ou desenvolver a capacidade de usar os números naturais para comparar as quantidades de elementos de dois conjuntos, mediante a realização de atividades adequadas.

Contagem: atividade

1 palito em cada copo

Sistema de Numeração Decimal

O **sistema de numeração decimal** que usamos para representar os números é *posicional*, no sentido de que tanto os algarismos (os símbolos elementares da notação) quanto suas posições relativas são relevantes.



Sistema de Numeração Decimal

O **sistema de numeração decimal** que usamos para representar os números é *posicional*, no sentido de que tanto os algarismos (os símbolos elementares da notação) quanto suas posições relativas são relevantes.

Didaticamente, isso constitui algo razoavelmente complexo que precisa ser cuidadosamente ensinado para garantir uma boa compreensão pelas crianças:



Sistema de Numeração Decimal

O **sistema de numeração decimal** que usamos para representar os números é *posicional*, no sentido de que tanto os algarismos (os símbolos elementares da notação) quanto suas posições relativas são relevantes.

Didaticamente, isso constitui algo razoavelmente complexo que precisa ser cuidadosamente ensinado para garantir uma boa compreensão pelas crianças:

“Há uma complexidade no nosso sistema de numeração, a começar pelos símbolos que usamos na escrita dos números que são, altamente, abstratos. Além do mais, ele é decimal, posicional e a leitura é feita de maneira inversa. Estes fatos tornam a construção do significado do número uma ação que exige muita experiência com diferentes materiais didáticos e paciência, pois cada criança tem o seu tempo.”

[**Berton-Itacarambi (2009)**, Prefácio]



Sistema de Numeração Decimal

Nosso sistema decimal possui 10 algarismos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9



Sistema de Numeração Decimal

Nosso sistema decimal possui 10 algarismos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

O número escrito com n algarismos $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$, posicionados em sequência da esquerda para a direita é dado por

$$a_n \dots a_2 a_1 := a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^0.$$



Sistema de Numeração Decimal

Nosso sistema decimal possui 10 algarismos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

O número escrito com n algarismos $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$, posicionados em sequência da esquerda para a direita é dado por

$$a_n \dots a_2 a_1 := a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^0.$$

Exemplo

$$7532 = 7000 + 500 + 30 + 2.$$



Sistema de Numeração Decimal

Diversas atividades e materiais podem ser usados para consolidar a compreensão do sistema decimal, tais como ábacos, a Escala Cuisinairie e o Material Dourado.



Sistema de Numeração Decimal

Diversas atividades e materiais podem ser usados para consolidar a compreensão do sistema decimal, tais como ábacos, a Escala Cuisinairie e o Material Dourado.

Sistema de Numeração Decimal: atividade

Só até 9



ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO



Adição e contagem

Contar é medir a quantidade de elementos de um conjunto finito.



Adição e contagem

Contar é medir a quantidade de elementos de um conjunto finito.

A contagem pode ser realizada direta ou indiretamente.



Adição e contagem

Contar é medir a quantidade de elementos de um conjunto finito.

A contagem pode ser realizada direta ou indiretamente.

Contamos diretamente estabelecendo uma correspondência biunívica entre o conjunto em questão e um subconjunto especial de números naturais: uma sequência que começa no 1 e termina no número de elementos do conjunto, sem faltar nenhum número intermediário.



Adição e contagem

Contamos indiretamente particionando o conjunto em subconjuntos disjuntos, contando a quantidade de elementos de cada subconjunto e somando os resultados.



Adição e contagem

Contamos indiretamente particionando o conjunto em subconjuntos disjuntos, contando a quantidade de elementos de cada subconjunto e somando os resultados.

Este é o significado fundamental da soma de dois números naturais:

O significado da Adição

O número $m + n$ (soma de m e n) é a quantidade de elementos de um conjunto constituído por dois subconjuntos disjuntos, um com m elementos e outro com n elementos.



Adição e contagem

Diversas atividades e materiais podem ser usados para consolidar a compreensão da adição, tais como ábacos, a Escala Cuisinairie e o Material Dourado.



Adição e contagem

Diversas atividades e materiais podem ser usados para consolidar a compreensão da adição, tais como ábacos, a Escala Cuisinairie e o Material Dourado.

O Sudoroku é um jogo interessante e útil para trabalhar as operações de adição e subtração, inclusive favorecendo o desenvolvimento do cálculo mental!



Adição e contagem

Diversas atividades e materiais podem ser usados para consolidar a compreensão da adição, tais como ábacos, a Escala Cuisinairie e o Material Dourado.

O Sudoroku é um jogo interessante e útil para trabalhar as operações de adição e subtração, inclusive favorecendo o desenvolvimento do cálculo mental!

Adição e contagem: atividade

Adição com Material Dourado



Situações com as operações de adição e subtração

Os PCNs distinguem quatro situações típicas de ocorrência das operações de adição e subtração [Brasil (1997), pp.69-71]:

- situações de combinação
- situações de transformação
- situações de comparação
- situações mistas (com múltiplas transformações)



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de combinação: juntar e separar, etc.



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de combinação: juntar e separar, etc.

Exemplo

A sala possui 20 cadeiras e 4 mesas. Qual é a quantidade de móveis?



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de combinação: juntar e separar, etc.

Exemplo

A sala possui 20 cadeiras e 4 mesas. Qual é a quantidade de móveis?

Exemplo

A sala possui 20 móveis, dos quais 4 são mesas e o restante cadeiras. Qual é o número de cadeiras?



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de transformação: aumentar e diminuir, ganhar e perder, etc.



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de transformação: aumentar e diminuir, ganhar e perder, etc.

Exemplo

A aula começou com 23 alunos presentes, mas chegaram 5 atrasados, de modo que a aula terminou com 28 alunos.



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de transformação: aumentar e diminuir, ganhar e perder, etc.

Exemplo

A aula começou com 23 alunos presentes, mas chegaram 5 atrasados, de modo que a aula terminou com 28 alunos.

Exemplo

A aula começou com 23 alunos presentes, mas terminou com 28. Quantos chegaram atrasados?



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de comparação: quantidade a mais ou a menos, etc.



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de comparação: quantidade a mais ou a menos, etc.

Exemplo

A turma da professora Maria tem 25 alunos, enquanto a turma da professora Zélia tem apenas 20. Quantos alunos a turma da professora Maria tem a mais do que a turma da professora Zélia?



Situações com as operações de adição e subtração

Situações de comparação: quantidade a mais ou a menos, etc.

Exemplo

A turma da professora Maria tem 25 alunos, enquanto a turma da professora Zélia tem apenas 20. Quantos alunos a turma da professora Maria tem a mais do que a turma da professora Zélia?

Exemplo

A turma da professora Maria tem 25 alunos, enquanto a turma da professora Zélia tem cinco alunos a menos. Quantos alunos a turma da professora Zélia?



Situações com as operações de adição e subtração

Situações mistas (com múltiplas transformações)



Situações com as operações de adição e subtração

Situações mistas (com múltiplas transformações)

Exemplo

A conferência começou com 57 participantes, chegaram 14 atrasados e saíram 9 antes do término. Quantas pessoas estavam presentes ao final da conferência?



Situações com as operações de adição e subtração

“As pesquisas apontam que os problemas de composição [que abrangem a relação entre o todo e suas partes] estão mais presentes em contextos informais e muitas vezes são resolvidos pelas crianças por contagem, recontagem e de cabeça, principalmente se os valores envolvidos estiverem na casa das dezenas. Esses problemas podem ser resolvidos por uma adição ou subtração e o tipo de raciocínio para sua resolução pode sofrer uma pequena variação. No entanto, as perguntas podem facilitar ou dificultar a resolução dos problemas, por exemplo, se o valor desconhecido se refere a situação inicial ou intermediária, então é provável que o nível de dificuldade seja maior.”

[Berton-Itacarambi (2009), p.89]



Comunicação e expressão com Matemática

É importante destacar que a comunicação é um importante elemento da educação em Matemática, envolvendo a capacidade de ler, interpretar, discutir e elaborar argumentos envolvendo conteúdos matemáticos. Atividades que envolvem a discussão, o relato e o registro de situações envolvendo a Matemática são necessárias para confrontar a ideia de que 'quem gosta de Matemática pode ser desleixado com a Língua Portuguesa'.



Comunicação e expressão com Matemática

É importante destacar que a comunicação é um importante elemento da educação em Matemática, envolvendo a capacidade de ler, interpretar, discutir e elaborar argumentos envolvendo conteúdos matemáticos. Atividades que envolvem a discussão, o relato e o registro de situações envolvendo a Matemática são necessárias para confrontar a ideia de que 'quem gosta de Matemática pode ser desleixado com a Língua Portuguesa'.

Atividade

Situações-problema no Jogo do Bafo.



Atividades com Resolução de Problemas



Situações-problema no Jogo do Bafo

Os seguintes 4 problemas podem ser apresentados e discutidos sequencialmente, visando tanto exercitar o aluno quanto possibilitar o professor avaliar informalmente seus conhecimentos.



Situações-problema no Jogo do Bafo

Os seguintes 4 problemas podem ser apresentados e discutidos sequencialmente, visando tanto exercitar o aluno quanto possibilitar o professor avaliar informalmente seus conhecimentos.

Problemas no Jogo do Bafo

- 1 Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi 5 num jogo de bafo. Com quantas fiquei?

Situações-problema no Jogo do Bafo

Os seguintes 4 problemas podem ser apresentados e discutidos sequencialmente, visando tanto exercitar o aluno quanto possibilitar o professor avaliar informalmente seus conhecimentos.

Problemas no Jogo do Bafo

- 1 Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi 5 num jogo de bafo. Com quantas fiquei?
- 2 Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi algumas num jogo de bafo e fiquei com 5. Quantas eu perdi?

Situações-problema no Jogo do Bafo

Os seguintes 4 problemas podem ser apresentados e discutidos sequencialmente, visando tanto exercitar o aluno quanto possibilitar o professor avaliar informalmente seus conhecimentos.

Problemas no Jogo do Bafo

- 1 Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi 5 num jogo de bafo. Com quantas fiquei?
- 2 Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi algumas num jogo de bafo e fiquei com 5. Quantas eu perdi?
- 3 Eu tinha algumas figurinhas da coleção Placar 2015. Depois de perder 12 jogando bafo, fiquei com 5. Quantas figurinhas eu tinha no início?

Situações-problema no Jogo do Bafo

Os seguintes 4 problemas podem ser apresentados e discutidos sequencialmente, visando tanto exercitar o aluno quanto possibilitar o professor avaliar informalmente seus conhecimentos.

Problemas no Jogo do Bafo

- 1 Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi 5 num jogo de bafo. Com quantas fiquei?
- 2 Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi algumas num jogo de bafo e fiquei com 5. Quantas eu perdi?
- 3 Eu tinha algumas figurinhas da coleção Placar 2015. Depois de perder 12 jogando bafo, fiquei com 5. Quantas figurinhas eu tinha no início?
- 4 Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi 5 num jogo de bafo. Cada pacote com 10 figurinhas custa 2 reais na banca. Quantos reais eu preciso gastar para recuperar o número de figurinhas que eu perdi?

Repartição justa?

Esta atividade trabalha a contextualização da Matemática em situações de conflito de interesse. Deve ficar claro que há situações em que o problema não possui uma solução consensual – significando que não é possível chegar a um acordo com base apenas na Matemática, mesmo quando ela está envolvida.



Repartição justa?

Esta atividade trabalha a contextualização da Matemática em situações de conflito de interesse. Deve ficar claro que há situações em que o problema não possui uma solução consensual – significando que não é possível chegar a um acordo com base apenas na Matemática, mesmo quando ela está envolvida.

Repartição justa?

Divida a turma em grupos de 3 ou 4 alunos para discutir a questão levantada pelo seguinte problema:

Ana e eu, Maria, precisamos ir de Guriri para a rodoviária de São Mateus, mas está chovendo. Prefiro ir de táxi para evitar molhar os cabelos, mas Ana prefere ir de ônibus porque não se importa. A corrida de táxi custa 30 reais para nós duas, enquanto a de ônibus custa 3 reais para cada uma. Eu lhe proponho pegarmos um táxi juntas e dividir o custo, mas ela somente concorda se puder contribuir com apenas 10 reais. Decido aceitar a diferença, mas fico imaginando se o combinado foi justo. O que você acha?

Atividades de Investigação



Atividades de investigação

Muitas atividades exploratórias ou investigativas podem ser propostas para desenvolver a compreensão acerca dos números e das operações aritméticas.



Atividades de investigação

Muitas atividades exploratórias ou investigativas podem ser propostas para desenvolver a compreensão acerca dos números e das operações aritméticas.

Para ilustrar, apresentamos duas tarefas investigativas semelhantes.



Atividades de investigação

Somando 9

Investigue as somas:

$$\begin{array}{rcl} 9 & = & \text{----} \\ 9 + 9 & = & \text{----} \\ 9 + 9 + 9 & = & \text{----} \end{array}$$



Atividades de investigação

Somando 9

Investigue as somas:

$$9 = \text{----}$$

$$9 + 9 = \text{----}$$

$$9 + 9 + 9 = \text{----}$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:



Atividades de investigação

Somando 9

Investigue as somas:

$$\begin{array}{rcl} 9 & = & \text{----} \\ 9 + 9 & = & \text{----} \\ 9 + 9 + 9 & = & \text{----} \end{array}$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:

- 1 Você percebe algum padrão?



Atividades de investigação

Somando 9

Investigue as somas:

$$\begin{array}{rcl} 9 & = & \text{----} \\ 9 + 9 & = & \text{----} \\ 9 + 9 + 9 & = & \text{----} \end{array}$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:

- 1 Você percebe algum padrão?
- 2 É possível estender a regularidade?



Atividades de investigação

Somando 9

Investigue as somas:

$$\begin{array}{rcl} 9 & = & \text{----} \\ 9 + 9 & = & \text{----} \\ 9 + 9 + 9 & = & \text{----} \end{array}$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:

- 1 Você percebe algum padrão?
- 2 É possível estender a regularidade?
- 3 Você consegue explicar o fenômeno?



Atividades de investigação

Somando 9 e outros números

Investigue as somas:



Atividades de investigação

Somando 9 e outros números

Investigue as somas:

$$\begin{array}{rcl}
 9 & = & \text{--} \\
 9 + 9 & = & \text{--} \\
 9 + 9 + 9 & = & \text{--}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 9 + 9 + 1 & = & \text{--} \\
 9 + 9 + 9 + 1 & = & \text{--} \\
 9 + 9 + 9 + 9 + 1 & = & \text{--}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 9 + 9 + 9 + 2 & = & \text{--} \\
 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & \text{--} \\
 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & \text{--}
 \end{array}$$



Atividades de investigação

Somando 9 e outros números

Investigue as somas:

$$\begin{array}{llll}
 9 & = & _ & 9 + 9 + 1 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 2 & = & _ \\
 9 + 9 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 1 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & _ \\
 9 + 9 + 9 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 9 + 1 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & _
 \end{array}$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:



Somando 9 e outros números

Investigue as somas:

9 = ____

$$9 + 9 + 1 = \underline{\quad}$$

$$9 + 9 + 9 + 2 =$$

$9 + 9 = \underline{\quad}$

$$9 + 9 + 9 + 1 = \underline{\quad}$$

$$9 + 9 + 9 + 9 + 2 =$$

$$9 + 9 + 9 = \underline{\quad}$$

$$9 + 9 + 9 + 9 + 1 = \underline{\quad}$$

$$9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 2 =$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:

- 1 Você percebe algum padrão?



Somando 9 e outros números

Investigue as somas:

$$\begin{array}{rcll} 9 & = & _ & \\ 9 + 9 & = & _ & \\ 9 + 9 + 9 & = & _ & \end{array} \quad \begin{array}{rcll} 9 + 9 + 1 & = & _ & \\ 9 + 9 + 9 + 1 & = & _ & \\ 9 + 9 + 9 + 9 + 1 & = & _ & \end{array} \quad \begin{array}{rcll} 9 + 9 + 9 + 2 & = & _ & \\ 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & _ & \\ 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & _ & \end{array}$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:

- 1 Você percebe algum padrão?
- 2 É possível estender a regularidade?



Atividades de investigação

Somando 9 e outros números

Investigue as somas:

$$\begin{array}{llll} 9 & = & _ & 9 + 9 + 1 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 2 & = & _ \\ 9 + 9 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 1 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & _ \\ 9 + 9 + 9 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 9 + 1 & = & _ & 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & _ \end{array}$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:

- 1 Você percebe algum padrão?
- 2 É possível estender a regularidade?
- 3 Você consegue explicar o fenômeno?



MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO



Multiplicação

A multiplicação de números naturais pode ser definida em termos da adição:

$n \times m$ é o número que resulta da adição de n parcelas iguais a m :

$$n \times m := \underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ parcelas}}$$



Multiplicação

A multiplicação de números naturais pode ser definida em termos da adição:

$n \times m$ é o número que resulta da adição de n parcelas iguais a m :

$$n \times m := \underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ parcelas}}$$

Com base nestas definição, podemos deduzir as propriedades algébricas da multiplicação, *viz.*, *comutatividade*, *associatividade* e *distributividade*.



Multiplicação

A **multiplicação de números naturais** pode ser definida em termos da adição:

$n \times m$ é o número que resulta da adição de n parcelas iguais a m :

$$n \times m := \underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ parcelas}}$$

Com base nestas **definição**, podemos deduzir as propriedades algébricas da multiplicação, *viz.*, *comutatividade*, *associatividade* e *distributividade*.

Entretanto, os significados da multiplicação não se esgotam nessa definição formal diretamente; consequentemente, nossa compreensão dessa operação requer o contato com situações nas quais seus significados são apreendidos intuitivamente.



Multiplicação

Os PCNs também desenvolvem essa mesma ideia:

“Uma abordagem freqüente no trabalho com a multiplicação é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição. Nesse caso, a multiplicação é apresentada como um caso particular da adição porque as parcelas envolvidas são todas iguais. (...) A partir dessa interpretação, definem-se papéis diferentes para o multiplicando (o número que se repete) e para o multiplicador (o número de repetições), não sendo possível tomar um pelo outro. (...) No entanto, essa abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas. / Além disso, ela provoca uma ambigüidade em relação à comutatividade da multiplicação.”

[Brasil (1997), pp.71-72]



Divisão

Analogamente à multiplicação, a divisão de números naturais pode ser definida em termos da adição:

$n \div m$ é o número que somado consigo mesmo m vezes resulta em n .



Divisão

Analogamente à multiplicação, a divisão de números naturais pode ser definida em termos da adição:

$n \div m$ é o número que somado consigo mesmo m vezes resulta em n .

Contudo, a divisão apresenta uma dificuldade inexistente na multiplicação: *nem sempre é possível dividir um número inteiro por outro, obtendo como resultado um número inteiro!*



Divisão

Analogamente à multiplicação, a divisão de números naturais pode ser definida em termos da adição:

$n \div m$ é o número que somado consigo mesmo m vezes resulta em n .

Contudo, a divisão apresenta uma dificuldade inexistente na multiplicação: *nem sempre é possível dividir um número inteiro por outro, obtendo como resultado um número inteiro!*

A divisão euclideana deve ser considerada em situações cuja divisão de números naturais não resulta num número natural. Nesse caso, a divisão resulta em dois números: o *quociente* e o *resto*.



Divisão Euclideana

A divisão do número natural m por n tem como resultado dois números naturais, o quociente q e resto r caracterizados pelas seguintes condições:

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n.$$



Divisão Euclideana

A divisão do número natural m por n tem como resultado dois números naturais, o quociente q e resto r caracterizados pelas seguintes condições:

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n.$$

O quociente q é o número máximo de vezes que n pode ser somado consigo mesmo sem ultrapassar m ; o resto r é a diferença entre m e o produto $q \times n$.



Divisão Euclideana

A divisão do número natural m por n tem como resultado dois números naturais, o quociente q e resto r caracterizados pelas seguintes condições:

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n.$$

O quociente q é o número máximo de vezes que n pode ser somado consigo mesmo sem ultrapassar m ; o resto r é a diferença entre m e o produto $q \times n$.

As operações de multiplicação e divisão podem parecer simples para quem as entende bem, mas elas escondem uma razoável complexidade conceitual que precisa ser dominada pelos aprendizes.



Multiplicação e divisão no passado

“Será um verdadeiro entretenimento retratar as etapas de uma multiplicação egípcia ou de uma divisão suméria; compreender porque as quatro operações de aritmética, que nos parecem hoje elementares, representaram durante dezenas de séculos, para milhões de homens, uma arte obscura e complexa, reservada para uma elite incomum, geralmente os sacerdotes; e perceber talvez com espanto, que na Europa, há poucos séculos, ainda se calculava não com algarismos, mas com os dedos da mão ou por meio de fichas sobre mesas, e que se fazia a contabilidade através de entalhes em madeira. Daí que, para dominar os mistérios da multiplicação e da divisão, o filho de um rico comerciante da Idade Média necessitava de vários anos de estudos e passava pela vicissitude de uma viagem por toda a Europa – em suma, o equivalente ao doutoramento atual.”

[Ifrah (2005), p.10]



Significados da Multiplicação e Divisão

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem quatro grupos de situações relacionadas às operações de multiplicação e divisão:



Significados da Multiplicação e Divisão

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem quatro grupos de situações relacionadas às operações de multiplicação e divisão:

- **Situações de comparação:** situações nas quais duas quantidades são comparadas, geralmente envolvendo termos explícitos tais como dobro, triplo, metade, quarta parte, etc.



Significados da Multiplicação e Divisão

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem quatro grupos de situações relacionadas às operações de multiplicação e divisão:

- **Situações de comparação:** situações nas quais duas quantidades são comparadas, geralmente envolvendo termos explícitos tais como dobro, triplo, metade, quarta parte, etc.
- **Situações de proporcionalidade:** situações nas quais duas quantidades estão numa relação de proporção direta, do tipo “ a está para b assim como c está para d ” [Berton-Itacarambi (2009), p.95].



Significados da Multiplicação e Divisão

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem quatro grupos de situações relacionadas às operações de multiplicação e divisão:

- **Situações de comparação:** situações nas quais duas quantidades são comparadas, geralmente envolvendo termos explícitos tais como dobro, triplo, metade, quarta parte, etc.
- **Situações de proporcionalidade:** situações nas quais duas quantidades estão numa relação de proporção direta, do tipo “ a está para b assim como c está para d ” [Berton-Itacarambi (2009), p.95].
- **Situações de configuração retangular:** situações que envolvem, direta ou indiretamente, o conceito de área de uma região retangular.



Significados da Multiplicação e Divisão

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem quatro grupos de situações relacionadas às operações de multiplicação e divisão:

- **Situações de comparação:** situações nas quais duas quantidades são comparadas, geralmente envolvendo termos explícitos tais como dobro, triplo, metade, quarta parte, etc.
- **Situações de proporcionalidade:** situações nas quais duas quantidades estão numa relação de proporção direta, do tipo “ a está para b assim como c está para d ” [Berton-Itacarambi (2009), p.95].
- **Situações de configuração retangular:** situações que envolvem, direta ou indiretamente, o conceito de área de uma região retangular.
- **Situações combinatórias:** situações que envolvem uma contagem cujo resultado pode ser obtido pela aplicação do *Princípio Multiplicativo*.



Significados da Multiplicação e Divisão

Princípio Multiplicativo

Numa situação de contagem que pode ser dividida em duas etapas independentes, se a primeira etapa possui n alternativas e a segunda etapa possui m alternativas, então o número total de alternativas é o produto $n \times m$.



Atividades com Resolução de Problemas



Atividades com resolução de problemas

Para desenvolver a intuição numérica, alguns problemas devem ser resolvidos de diversas formas diferentes:



Atividades com resolução de problemas

Para desenvolver a intuição numérica, alguns problemas devem ser resolvidos de diversas formas diferentes:

Exemplo

João tem 96 livros para arrumar em 6 prateleiras. Ele quer colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ficarão em cada prateleira?

Resolver (i) usando um desenho, (ii) usando um material concreto, (iii) efetuando um cálculo aritmético.



Atividades com resolução de problemas

Exemplo

*A família de Clarinha compra 4 pães para o café da manhã todos os dias.
Ela quer saber:*

- 1) Quantos pães sua família compra toda semana?*
- 2) Quantos pães sua família compra todos os meses?*

*Resolver (i) usando um desenho, (ii) usando um material concreto,
(iii) efetuando um cálculo aritmético.*



Atividades com resolução de problemas

Para desenvolver a capacidade de resolver problemas, os problemas devem ser apresentados com níveis de complexidade crescente:



Atividades com resolução de problemas

Para desenvolver a capacidade de resolver problemas, os problemas devem ser apresentados com níveis de complexidade crescente:

Exemplo

1) *A escola comprou 6 bolas para as aulas de educação física. Cada bola custou R\$74,00. Quanto a escola pagou por todas as bolas?*



Atividades com resolução de problemas

Para desenvolver a capacidade de resolver problemas, os problemas devem ser apresentados com níveis de complexidade crescente:

Exemplo

- 1) *A escola comprou 6 bolas para as aulas de educação física. Cada bola custou R\$74,00. Quanto a escola pagou por todas as bolas?*
- 2) *A escola comprou 6 bolas para as aulas de educação física, três de futebol de salão, duas de vôlei e uma de basquete. As bolas de futebol de salão custaram R\$74,00, as de vôlei custaram R\$60,00 e a de basquete R\$125,00. Quanto a escola pagou por todas as bolas?*



Atividades com resolução de problemas

Exemplo

3) *A escola comprou bolas de futebol de salão, de vôlei e de basquete para as aulas de educação física. Cada bola de futebol de salão custou R\$74,00, cada uma de vôlei custou R\$60,00 e cada uma de basquete custou R\$125,00. Quantas bolas de cada a escola comprou se total pago foi de R\$592,00?*



Atividades com resolução de problemas

Apresentar problemas contextualizados:

Exemplo

Tempo de viagem

Minha filha nasceu em Rio Grande, RS. Hoje ela tem 7 anos e gosta de fazer perguntas, como a maioria das crianças. Outro dia, ela me perguntou sobre quanto tempo alguém gastaria para ir de São Mateus a Rio Grande de avião. Eu respondi que gastaria algumas horas. “E se for de ônibus?” Então, eu disse que gastaria alguns dias. “E se for a pé?” Bem, nesse caso tive que pensar. Afinal, quantos dias uma pessoa gastaria para ir de São Mateus e Rio Grande, considerando que a distância entre essas cidades é de cerca de 4 mil quilômetros e que uma pessoa com bom preparo físico é capaz de andar até 50 quilômetros por dia?

Atividades com resolução de problemas

Exemplo

Precisamos de saneamento básico?

Perto da minha casa passa um córrego, mas não posso brincar lá porque ele é muito sujo e fedorento. Meu pai disse que é porque a cidade inteira despeja nele todo cocô que fazemos. Fiquei espantado imaginando quanto dá isso... Afinal, qual é a quantidade de fezes que produzimos em São Mateus todos os dias, considerando que a cidade tem 50 mil habitantes e cada um de nós contribui com cerca de 300g do material?



Atividades com resolução de problemas

Desafio

Formule quatro problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão, um para cada um dos significados destacados nos PCNs.



Atividades de Investigação



Atividades de investigação



Atividades de investigação

Tarefa investigativa: *Tabuada de 3*

- i) Construa a tabuada de 3 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de 10×3 e descubra o que acontece.



Atividades de investigação

Tarefa investigativa: *Tabuada de 3*

- i) Construa a tabuada de 3 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de 10×3 e descubra o que acontece.

Tarefa investigativa: *Tabuada de 5*

- i) Construa a tabuada de 5 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de 10×5 e descubra o que acontece.



Atividades de investigação

Tarefa investigativa: *Tabuada de 3*

- i) Construa a tabuada de 3 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de 10×3 e descubra o que acontece.

Tarefa investigativa: *Tabuada de 5*

- i) Construa a tabuada de 5 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de 10×5 e descubra o que acontece.

Tarefa investigativa: *Tabuada de 6*

- i) Construa a tabuada de 6 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de 10×6 e descubra o que acontece.

Atividades de investigação

Números Quadrados

“Números quadrados” correspondem a figuras quadradas como nos seguintes exemplos:

$$\begin{array}{cccc}
 \left[\begin{array}{c} \cdot \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \\
 1 & 4 & 9 & 16
 \end{array}$$

Encontre novos números quadrados e descubra um método eficiente para dizer se um dado número é quadrado ou não. Registre suas conclusões.



Atividades de investigação

Números Cúbicos

Os cubos dos primeiros números naturais podem ser escritos como somas de números ímpares:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3 + 5$$

$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

- i) Descreva detalhadamente a propriedade observada.
- ii) Será que a propriedade permanece válida para outros cubos de números naturais?



Atividades de investigação

Múltiplos de 37

Complete a sequência de um modo interessante:

$$37 \times 3 = \text{----}$$

$$37 \times 6 = \text{----}$$

$$37 \times 9 = \text{----}$$

$$\text{--} \times \text{--} = \text{----}$$

Questão 1: Tente descobrir até onde podemos ir seguindo o padrão.

Questão 2: O que acontece da décima linha em diante?

Questão 3: Procure uma explicação para o fenômeno.



CÁLCULO MENTAL



Cálculo Mental

Os Parâmetros Curriculares Nacionais distinguem quatro modalidades de cálculo: *cálculo mental*, *cálculo escrito*, *cálculo exato* e *cálculo aproximado*:



Cálculo Mental

Os Parâmetros Curriculares Nacionais distinguem quatro modalidades de cálculo: *cálculo mental*, *cálculo escrito*, *cálculo exato* e *cálculo aproximado*:

“A construção de um repertório básico constitui suporte para a ampliação dos diferentes procedimentos e tipos de cálculos que o aluno vai desenvolver ao longo dos ciclos iniciais: cálculo mental ou escrito, exato ou aproximado. / Os diferentes procedimentos e tipos de cálculo relacionam-se e complementam-se. O cálculo escrito, para ser compreendido, apóia-se no cálculo mental e nas estimativas e aproximações. Por sua vez, as estratégias de cálculo mental, pela sua própria natureza, são limitadas. É bastante difícil, principalmente tratando-se de cálculos envolvendo números com vários dígitos, armazenar na memória uma grande quantidade de resultados. Assim, a necessidade de registro de resultados parciais acaba originando procedimentos de cálculo escrito.”

[Brasil (1997), p.75]



Cálculo Mental

Quanto ao significado de *cálculo mental*, os PCNs definem:



Cálculo Mental

Quanto ao significado de *cálculo mental*, os PCNs definem:

“De forma simples, pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos.”

[Brasil (1997), p.117]



Cálculo Mental

Quanto ao significado de *cálculo mental*, os PCNs definem:

“De forma simples, pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos.”

[Brasil (1997), p.117]

Por mais natural que seja essa definição, alguns pesquisadores a consideram demasiadamente estreita!



Cálculo Mental

Cecília Parra propõe uma definição mais abrangente de cálculo mental (denominado cálculo pensado):



Cálculo Mental

Cecília Parra propõe uma definição mais abrangente de cálculo mental (denominado cálculo pensado):

“Entenderemos cálculo mental o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido, para obter resultados exatos ou aproximados. / Os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números.”

[Parra (1996), p.189]



Cálculo Mental

A noção de cálculo mental segundo Parra possui um elemento importante que falta na definição dada pelos PCNs:



Cálculo Mental

A noção de cálculo mental segundo Parra possui um elemento importante que falta na definição dada pelos PCNs:

a deliberação por uma estratégia não-algorítmica.



Cálculo Mental

A noção de cálculo mental segundo Parra possui um elemento importante que falta na definição dada pelos PCNs:

a deliberação por uma estratégia não-algoritmica.

Incorporar esse elemento no conceito de cálculo mental significa ampliar seu repertório para além do cálculo mecânico/automático (algoritmico) e desvinculá-lo de uma oposição ao cálculo escrito.



Cálculo Mental

Exemplo

O seguinte desenvolvimento (quando escrito em papel) pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs (conforme [Nacarato-Mengali-Passos (2011), p.98]):



Cálculo Mental

Exemplo

O seguinte desenvolvimento (quando escrito em papel) pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs (conforme [Nacarato-Mengali-Passos (2011), p.98]):

$$54 + 37 = 50 + 4 + 30 + 7 = 80 + 11 = 91$$



Cálculo Mental

Exemplo

O seguinte desenvolvimento (quando escrito em papel) pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs (conforme [Nacarato-Mengali-Passos (2011), p.98]):

$$54 + 37 = 50 + 4 + 30 + 7 = 80 + 11 = 91$$

Outro cálculo escrito que também pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs:

Exemplo

$$592 + 27 =$$

Cálculo Mental

Exemplo

O seguinte desenvolvimento (quando escrito em papel) pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs (conforme [Nacarato-Mengali-Passos (2011), p.98]):

$$54 + 37 = 50 + 4 + 30 + 7 = 80 + 11 = 91$$

Outro cálculo escrito que também pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs:

Exemplo

$$592 + 27 = (600 - 8) + 27 =$$

Cálculo Mental

Exemplo

O seguinte desenvolvimento (quando escrito em papel) pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs (conforme [Nacarato-Mengali-Passos (2011), p.98]):

$$54 + 37 = 50 + 4 + 30 + 7 = 80 + 11 = 91$$

Outro cálculo escrito que também pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs:

Exemplo

$$592 + 27 = (600 - 8) + 27 = 600 - 8 + (28 - 1) =$$

Cálculo Mental

Exemplo

O seguinte desenvolvimento (quando escrito em papel) pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs (conforme [Nacarato-Mengali-Passos (2011), p.98]):

$$54 + 37 = 50 + 4 + 30 + 7 = 80 + 11 = 91$$

Outro cálculo escrito que também pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs:

Exemplo

$$592 + 27 = (600 - 8) + 27 = 600 - 8 + (28 - 1) = 600 + 20 - 1 =$$

Cálculo Mental

Exemplo

O seguinte desenvolvimento (quando escrito em papel) pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs (conforme [Nacarato-Mengali-Passos (2011), p.98]):

$$54 + 37 = 50 + 4 + 30 + 7 = 80 + 11 = 91$$

Outro cálculo escrito que também pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não segundo os PCNs:

Exemplo

$$592 + 27 = (600 - 8) + 27 = 600 - 8 + (28 - 1) = 600 + 20 - 1 = 620 - 1 = 619$$

Cálculo Mental

É importante considerar a relação entre *cálculo mental* e *estimação*:



Cálculo Mental

É importante considerar a relação entre *cálculo mental* e *estimação*:

“Um dos primeiros passos para o desenvolvimento do cálculo mental será o exercício da estimativa. O aluno deve desenvolver a sua capacidade de inferir o resultado possível para determinado cálculo. Só com o exercício continuado de estimativas o aluno ganhará capacidade de avaliar os resultados que obtém. A estimativa pode e deve ser usada junto com outros procedimentos, de maneira a antecipar, controlar, julgar a confiabilidade dos resultados. Assim, cálculo mental e estimativa possuem significados muito próximos. A relação entre eles está no fato do cálculo mental poder ser feito a partir de estimativa (cálculo aproximado mais geral) e estimamos a partir de um cálculo mental.”

[Fontes (2010), pp.41-42]



Cálculo Mental

Exemplo

Quanto vale $592 + 27$?

Cálculo Mental

Exemplo

Quanto vale $592 + 27$?

Embora possamos responder exatamente efetuando a conta, dá para saber que o resultado é um número próximo de 630.

Cálculo Mental

Exemplo

Quanto vale $592 + 27$?

Embora possamos responder exatamente efetuando a conta, dá para saber que o resultado é um número próximo de 630.

Por que?

Cálculo Mental

Exemplo

Quanto vale $592 + 27$?

Embora possamos responder exatamente efetuando a conta, dá para saber que o resultado é um número próximo de 630.

Por que?

Porque 592 está próximo de 600, 27 está próximo de 30 e $600 + 30 = 630$:

$$\left. \begin{array}{l} 592 \sim 600 \\ 27 \sim 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 592 + 27 \sim 600 + 30 = 630$$

Cálculo Mental

Exemplo

Quanto vale $592 + 27$?

Embora possamos responder exatamente efetuando a conta, dá para saber que o resultado é um número próximo de 630.

Por que?

Porque 592 está próximo de 600, 27 está próximo de 30 e $600 + 30 = 630$:

$$\left. \begin{array}{l} 592 \sim 600 \\ 27 \sim 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 592 + 27 \sim 600 + 30 = 630$$

(Mais precisamente, como 592 é menor do que 600 e 27 é menor do que 30, podemos concluir que $592 + 27$ está próximo e é menor do que 630.)

Cálculo Mental

Como síntese, proponho a seguinte definição de cálculo mental:



Cálculo Mental

Como síntese, proponho a seguinte definição de cálculo mental:

Cálculo Mental

Cálculo mentalmente é realizar operações aritméticas ou algébricas seguindo estratégias deliberadas, de modo exato ou aproximado, com ou sem auxílio de recursos materiais (como registros em papel ou computador).



Cálculo Mental

Como síntese, proponho a seguinte definição de cálculo mental:

Cálculo Mental

Cálculo mentalmente é realizar operações aritméticas ou algébricas seguindo estratégias deliberadas, de modo exato ou aproximado, com ou sem auxílio de recursos materiais (como registros em papel ou computador).

Nesse sentido, *cálculo mental* se contrapõe ao *cálculo mecânico/automático (algoritmico)* – e não coincide com a noção comum de “fazer contas de cabeça”.



Cálculo Mental

Como síntese, proponho a seguinte definição de cálculo mental:

Cálculo Mental

Cálculo mentalmente é realizar operações aritméticas ou algébricas seguindo estratégias deliberadas, de modo exato ou aproximado, com ou sem auxílio de recursos materiais (como registros em papel ou computador).

Nesse sentido, *cálculo mental* se contrapõe ao *cálculo mecânico/automático (algoritmico)* – e não coincide com a noção comum de “fazer contas de cabeça”.

No que tange ao ensino da Matemática, o essencial é *desenvolver nos estudantes a capacidade de escolher estratégias de cálculo adequadas para cada situação-problema*.



Razões para ensinar cálculo mental na escola



Razões para ensinar cálculo mental na escola

Cecília Parra apresenta três razões para ensinar cálculo mental
[Parra (1996), pp.201–207]:



Razões para ensinar cálculo mental na escola

Cecília Parra apresenta três razões para ensinar cálculo mental [Parra (1996), pp.201–207]:

- O cálculo mental “aumenta o conhecimento no campo numérico”.



Razões para ensinar cálculo mental na escola

Cecília Parra apresenta três razões para ensinar cálculo mental [Parra (1996), pp.201–207]:

- O cálculo mental “aumenta o conhecimento no campo numérico”.
- O cálculo mental “favorece uma melhor relação do aluno com a matemática”.



Razões para ensinar cálculo mental na escola

Cecília Parra apresenta três razões para ensinar cálculo mental [Parra (1996), pp.201–207]:

- O cálculo mental “aumenta o conhecimento no campo numérico”.
- O cálculo mental “favorece uma melhor relação do aluno com a matemática”.
- As aprendizagens do cálculo mental “influem na capacidade de resolver problemas”, pois “o enriquecimento das relações numéricas através do cálculo mental facilita para os alunos, frente a uma situação, serem capazes de moldá-la, por antecipação, por reflexão”.



Razões para ensinar cálculo mental na escola

Fontes acrescenta que:

“o trabalho com cálculo mental nos problemas é de extrema importância para a construção da autonomia da criança, pois permite gerar formas de proceder próprias de um sujeito autônomo, com flexibilidade, criatividade, capacidade de argumentação etc.”

[Fontes (2010), pp.51–52]



Razões para ensinar cálculo mental na escola

Em síntese:

“O cálculo mental permite à criança ter experiências que, mais tarde, a ajudarão a compreender a formalização das propriedades (nomear e saber as características associativa, comutativa etc, por exemplo). O trabalho com cálculo mental também permite à criança compreender a base decimal do nosso sistema de numeração, lidando com sua regra de diferentes maneiras. Desse modo, o próprio domínio do algoritmo é tanto mais fácil quanto maior for a capacidade de cálculo mental. A excessiva preocupação pela representação formal na matemática, destituída de sua relação com o cotidiano, leva à manipulação mecânica dos algoritmos, fazendo com que o aluno repita procedimentos iguais e mecânicos, sem a compreensão real de base do SND [sistema de numeração decimal] e das propriedades das operações, ambas fundamentais à construção dos conceitos matemáticos. É preciso construir uma noção de número e operação com sentido.”

[Fontes (2010), pp.46]



Atividades de cálculo mental



Atividades de cálculo mental

Atividade

Realizar os seguintes cálculos sem usar contas armadas, mas podendo usar lápis e papel:

- ① $3680 + 4460$
- ② $3680 - 4460$
- ③ 96×12
- ④ $96 \div 12$
- ⑤ $3680 - 96 \times 12$



Atividades de cálculo mental



Atividades de cálculo mental

Adivinhação aritmética

- 1 Pense num número, mas não diga qual é.



Atividades de cálculo mental

Adivinhação aritmética

- 1 Pense num número, mas não diga qual é.
- 2 Some 15.



Atividades de cálculo mental

Adivinhação aritmética

- 1 Pense num número, mas não diga qual é.
- 2 Some 15.
- 3 Multiplique por 3.



Atividades de cálculo mental

Adivinhação aritmética

- 1 Pense num número, mas não diga qual é.
- 2 Some 15.
- 3 Multiplique por 3.
- 4 Subtraia 9.



Atividades de cálculo mental

Adivinhação aritmética

- 1 Pense num número, mas não diga qual é.
- 2 Some 15.
- 3 Multiplique por 3.
- 4 Subtraia 9.
- 5 Divida por 3.



Atividades de cálculo mental

Adivinhação aritmética

- 1 Pense num número, mas não diga qual é.
- 2 Some 15.
- 3 Multiplique por 3.
- 4 Subtraia 9.
- 5 Divida por 3.
- 6 Subtraia 8.



Atividades de cálculo mental

Adivinhação aritmética

- 1 Pense num número, mas não diga qual é.
- 2 Some 15.
- 3 Multiplique por 3.
- 4 Subtraia 9.
- 5 Divida por 3.
- 6 Subtraia 8.
- 7 Diga o resultado final.



Atividades de cálculo mental

Adivinhação aritmética

- 1 Pense num número, mas não diga qual é.
- 2 Some 15.
- 3 Multiplique por 3.
- 4 Subtraia 9.
- 5 Divida por 3.
- 6 Subtraia 8.
- 7 Diga o resultado final.
- 8 Então, o número que você pensou é...



Atividades de cálculo mental

Jogo dos 17 pontos

[Berton-Itacarambi (2009), p.40]



Atividades de cálculo mental

Jogo dos 17 pontos

[Berton-Itacarambi (2009), p.40]

Jogo Soma Certa

...



Vale a pena?

O depoimento de um professor da educação básica:

<https://www.youtube.com/watch?v=dZaFUNnVuyU>



REFERÊNCIAS



Referências



Ivani C.B. Berton, Ruth R. Itacarambi

Números, brincadeiras e jogos

Editora Livraria da Física: São Paulo, 2009



BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental

Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino de Primeira a Quarta Séries.

MEC/SEF: Brasília, 1997



BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental

Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino da Quinta a Oitava Séries.

MEC/SEF: Brasília, 1998



Guy Brousseau

Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdo e Métodos de Ensino

Editora Ática: São Paulo, 2008.



Referências



Cintia G. da Fontes

O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo: São Paulo, 2010.

URL: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-11112010-162005/pt-br.php>

(Acesso em 23/04/2015)



Georges Ifrah

Os números: história de uma grande invenção – 11a. edição

Editora Globo: São Paulo, 2005.



Elon L. Lima

Curso de Análise - volume 1

IMPA: Rio de Janeiro, 1992



Adair M. Nacarato, Brenda L.S. Mengali, Cármen L.B. Passos

A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: tecendo fios do



Referências



Cecília Parra

Cálculo Mental na Escola Primária

In: Cecília Parra, Irma Saiz: Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas
Artmed: Porto Alegre, 1996: pp.186-235.



Maria G. Spinillo

O Sentido de Número e sua Importância na Educação Matemática

Márcia R.F. Brito (org.): Solução de Problemas e a Matemática Escolar – 2a. edição

Editora Alínea: 2010: pp.83-111.



OBRIGADO!

