

# ARITMÉTICA:

## Tópicos Teóricos e Didáticos

Lúcio Fassarella  
DMA/CEUNES/UFES

May 8, 2015

### Abstract

Tópicos de Aritmética elementar com comentários sobre seu ensino e aprendizagem, elaborado para o *Curso de Formação Continuada em Matemática para Professores da Educação Básica*, realizado no Centro Universitário Norte do Espírito Santo da Universidade Federal do Espírito Santo (campus São Mateus) entre abril e setembro de 2015.

## Contents

|          |                                                             |           |
|----------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Números</b>                                              | <b>2</b>  |
| 1.1      | O que é número? . . . . .                                   | 2         |
| 1.2      | Compreensão Numérica . . . . .                              | 2         |
| 1.2.1    | Princípios para o Ensino-Aprendizagem dos Números . . . . . | 3         |
| <b>2</b> | <b>Contagem e <i>Sistema de Numeração Decimal</i></b>       | <b>6</b>  |
| <b>3</b> | <b>Adição e Subtração</b>                                   | <b>8</b>  |
| 3.1      | Situações-problema do campo aditivo . . . . .               | 9         |
| 3.1.1    | Situações-problema no Jogo do Bafo. . . . .                 | 10        |
| 3.1.2    | Situação-problema: <i>Repartição justa?</i> . . . . .       | 12        |
| 3.2      | Atividades de investigação matemática . . . . .             | 13        |
| <b>4</b> | <b>Multiplicação e Divisão</b>                              | <b>15</b> |
| 4.1      | Situações-problema do campo multiplicativo . . . . .        | 16        |
| 4.2      | Atividades de investigação matemática . . . . .             | 18        |
| <b>A</b> | <b>Cálculo Mental</b>                                       | <b>20</b> |
| A.1      | Atividades com cálculo mental . . . . .                     | 22        |
| A.1.1    | Adivinhação aritmética . . . . .                            | 22        |
| A.1.2    | Jogo dos 17 Pontos . . . . .                                | 23        |
| A.1.3    | Jogo <i>Soma Certa</i> . . . . .                            | 24        |

# 1 Números

## 1.1 O que é número?

“Do ponto de vista de Peano, os números naturais não são definidos. É apresentada uma lista de propriedades gozadas por eles (os axiomas) e tudo o mais decorre daí. Não interessa o que os números são; (isto seria mais um problema filosófico) o que interessa é como eles se comportam.”

Elon L. Lima: *Curso de Análise - volume 1*. IMPA: Rio de Janeiro, 1992: p.25.

*Os números são os resultados de medidas de quantidades discretas ou contínuas.*<sup>1</sup> Mais precisamente, os números naturais resultam das medidas de quantidades discretas, *i.e.*, que podem ser contadas (identificadas sequencialmente); os números reais resultam das medidas de quantidades contínuas, sendo essas medidas obtidas pela comparação com alguma unidade padronizada: comprimento, área, volume, tempo, etc.

Embora uma definição de número seja interessante e até mesmo útil teoricamente, *o entendimento do conceito de número é desenvolvido somente pela experiência refletida*:

“As pesquisas em educação (...) têm mostrado que o número não é empírico, por natureza; a criança o constrói através da abstração reflexiva, pela sua própria ação mental de colocar coisas em relação.” [1, pp.15-16]

## 1.2 Compreensão Numérica

Em síntese, uma pessoa pode adquirir uma compreensão razoável da Matemática sem nunca ter se deparado com uma definição de número – e sem nunca ter precisado de alguma. Fundamental é conhecer as propriedades dos números, ter a habilidade de reconhecê-los em contextos variados e saber usá-los para interpretar situações, comunicar ideias e formular e resolver problemas. Esta é a concepção de alguns pesquisadores em Educação Matemática:<sup>2</sup>

“Ser numeralizado requer familiaridade com o mundo dos números, pensar matematicamente em situações diversas, empregando sistemas eficientes de representação e compreendendo as regras lógicas que regem os conceitos matemáticos inseridos nessas situações. (...) Segundo nossa interpretação, tornar-se numeralizado é algo que está fortemente relacionado ao que a literatura tem denominado *sentido de número*.” “Relevante ressaltar que o *sentido de número* não se trata de um conceito matemático específico. O sentido de número (...) refere-se à habilidade de lidar, de forma eficiente e flexível, com situações cotidianas extraescolares que incluem números e quantidades.”

Spinillo [18, p.85, p.86].

---

<sup>1</sup>Lembro-me de ter escutado uma definição similar do Prof. Elon Lages Lima já faz muito tempo, mas não me lembro de uma referência.

<sup>2</sup>Dizemos que uma pessoa que possui um conhecimento articulado e funcional dos números é “*numeralizada*” ou possui o “*sentido de número*”, termos que seriam análogos do termo “*letrada*” que se refere ao uso articulado e funcional da linguagem natural.

“Compreensão numérica refere-se a uma intuição sobre números e seus vários usos e interpretações; uma apreciação de vários níveis de exatidão quando estimado; à habilidade para detectar erros aritméticos, e ao uso do senso-comum ao trabalhar com números. Compreensão numérica não é uma entidade finita que o aluno possui ou não, nem uma unidade curricular que pode ser ensinada e depois deixada de lado. Acima de tudo, a compreensão numérica é caracterizada por uma intenção de construir sentido para as situações numéricas. Compreensão numérica é uma forma de pensar que deve permear todos os aspectos do ensino e aprendizagem da matemática, se a matemática é algo que deva fazer sentido.”

Reys *et al.*, 1995. *Apud* [18, p.86].

“O sentido do número, neste texto, refere-se à capacidade de usar os números e os métodos quantitativos como meio de comunicação, processamento e interpretação da informação. Resulta na expectativa da utilidade dos números e de certa regularidade matemática, ou seja, de adquirir uma compreensão global dos números e das operações e utilizá-las para analisar situações-problema e desenvolver estratégias úteis para resolvê-las. As pesquisas em educação têm mostrado que o número não é empírico, por natureza, a criança constrói através da abstração reflexiva pela sua própria ação mental de colocar coisas em relação. O conceito de número não pode ser ensinado, é construído pelas crianças pela sua capacidade natural de pensar. E, da mesma forma, a adição não é ensinada, a própria construção do número envolve a repetida adição de mais um, o princípio aditivo.”

Berton-Itacarambi [1, p.15].

### 1.2.1 Princípios para o Ensino-Aprendizagem dos Números

A recomendação didática genérica para desenvolver *numeralização* na escola consiste em variar as situações didáticas, variar os suportes usados para lidar com os números e postergar o ensino dos algoritmos aritméticos para quando a intuição numérica estiver razoavelmente bem desenvolvida. Explicitamente, três princípios básicos constituem essa recomendação:

- **Desenvolver a intuição numérica** antes de ensinar os algoritmos aritméticos.
- **Contextualizar o ensino dos algoritmos aritméticos**, para que seu aprendizado seja motivado e significativo.
- **Abordar simultaneamente os pares de operações adição-subtração e multiplicação-divisão**, considerando que os elementos de cada par de operações estão intimamente relacionadas tanto nos seus significados quanto nos seus algoritmos de cálculo.

Esses princípios são corroborados por alguns pesquisadores em Educação Matemática:

“As situações de ensino poderiam integrar diferentes sistemas e suportes de representação que poderiam coexistir simultaneamente durante o processo de resolução: o aluno poderia combinar representações simbólicas (números, linguagem natural), representações icônicas (tracinhos, pontinhos, setas) e representações gráficas variadas (desenhos, diagramas, tabelas) e, ao mesmo tempo, utilizar-se de materiais concretos. Assim, ao ser instruído sobre esses conceitos, o aluno estaria desenvolvendo uma boa intuição sobre números, suas relações, usos e diferentes formas de representação. As regras, o emprego de algoritmos, os cálculos precisos poderiam ser introduzidos posteriormente.”

Spinillo [18, pp.104-105].

“As operações devem estar sempre contextualizadas, para que os algoritmos não se tornem vazios de significado, por não estarem traduzindo situações que possuem sentido e nem uma situação-problema em que a criança esteja desafiada a resolver.”

Fonseca [8, p.49]

“Para desenvolver uma compreensão mais ampla da multiplicação, é necessário trabalhar paralelamente multiplicação e divisão.”

PCNs [3, p.109]

No ensino das operações aritméticas é importante envolver os alunos em situações em quantidade e qualidades suficientes para que eles possam refletir e consolidar sua compreensão acerca dos seus significados e relações. Para tanto, o professor tem uma tripla responsabilidade: *preparar as aulas com essa perspectiva, avaliar o consequente aprendizado dos alunos e tomar iniciativas para contornar eventuais dificuldades de aprendizagem*. Na fase inicial do processo de ensino-aprendizagem das operações aritméticas, a supervisão do professor é fundamental:

“Os alunos dos dois primeiros anos [do Ensino Fundamental] ao se depararem com situações novas precisam do apoio e orientação do professor que deverá ajudá-los a analisar, interpretar e optar por procedimentos para resolver as situações-problema. Os procedimentos utilizados pelos alunos ao resolver problemas podem resultar de experiências e aprendizados anteriores e serem aperfeiçoados com a mediação do professor.” “É importante nesta fase que eles compreendam alguns dos significados da multiplicação e da divisão e utilizem estratégias pessoais, sem a necessidade do uso de técnicas operatórias convencionais.”

Berton-Itacarambi [1, p.97]

A ênfase precoce e exagerada nos algoritmos de cálculo tende a prejudicar o aprendizado:

“Muitas vezes constatamos que a prática pedagógica nas séries iniciais se centra na aritmética, em especial, no ensino dos algoritmos desprovidos de significados, e não privilegia a questão conceitual, e as ideias presentes nas operações básicas. Tais práticas acabam por consolidar uma matemática escolar reducionista, que não possibilita o pensar e o fazer matemático em sala de aula.” [Como consequência,] “o que se observa, muitas vezes, é a falta de autonomia do aluno diante de uma situação-problema: ele se limita a esperar que a professora diga qual é a operação que deve ser feita ou, então, atira-se a fazer uma série de algoritmos totalmente desvinculados do contexto.”

Nacarato-Mengali-Passos [11, p.89]

Finalizamos com este excerto do relato de Saiz [16] de um estudo exploratório sobre o ensino-aprendizagem da *divisão* realizado junto a estudantes e professores da quinta e sexta séries no ano de 1996, no qual se discute a tensão entre o *ensino de algoritmos* e a *aprendizagem com compreensão*:

“O ensino de conhecimentos tais como algoritmos, propriedades ou definições são facilmente organizáveis na sala de aula; são identificáveis, podem ser descritos e sua aquisição é verificável de maneira simples. Assim, para avaliar se os alunos ‘sabem dividir’ é suficiente formular-lhes várias contas e verificar seus resultados. Ademais, trata-se de técnicas conhecidas pela sociedade. Os pais podem saber se seus filhos aprenderam a dividir ou não. / No entanto, ao falar de reconhecimentos de situações de divisão, de significados de conceitos, se entra em um terreno muito mais ambíguo e difícil de identificar. Tanto os professores como os pais desejariam que o ensino conseguisse nos alunos não só o conhecimento dos saberes institucionais,

como também a compreensão; porém, diante da falta de uma solução evidente, a aprendizagem dos algoritmos acaba eliminando a busca da compreensão. / Em geral, o ensino das operações matemáticas está baseado na comunicação de um procedimento de cálculo associado posteriormente a um pequeno universo de problemas que, supõe-se, ‘darão conta’ do significado do conceito. / Porém, isolados de seu contexto, os algoritmos se convertem em resposta adquiridas para perguntas futuras a respeito das quais não se sabe muito. Os algoritmos são aprendidos sabendo-se que vão servir para resolver problemas, porém se desconhece de que problemas se trata.”

Saiz [16, p.168]

É importante destacar que os significados das operações podem ser trabalhados de modo intuitivo com material concreto, *e.g.*, *Ábaco*, *Material Dourado*, *Escala Cuisinaire*, *etc.* Em qualquer nível de ensino, sempre que um aluno demonstrar incompreensão ou confusão quanto aos significados das operações aritméticas, podemos recorrer a tais recursos para dar esclarecimentos. Vale lembrar de uma das leis da boa performance (em qualquer atividade): *Devemos sempre retornar aos fundamentos.*

## 2 Contagem e *Sistema de Numeração Decimal*

### Contagem

Embora contar signifique *medir o tamanho de um conjunto finito*, o processo de contagem é normalmente realizado com base na ordenação dos números naturais, definida pela sequência “1, 2, 3,...” (Isso significa que os conceitos de número natural cardinal e número natural ordinal estão intimamente relacionados: efetivamente, *contamos um conjunto finito ordenando seus elementos*.)

Entretanto, memorizar a sequência (ordem) dos números naturais não significa possuir uma compreensão útil desses números: para tanto, é necessário saber usá-los para comparar as quantidades de dois conjuntos finitos, de modo a poder responder se eles têm a mesma quantidade de elementos, ou se um tem mais elementos do que outro.

A capacidade de usar os números naturais para comparar as quantidades de elementos de dois conjuntos pode ser testada ou desenvolvida mediante a realização de atividades adequadas, tal como a seguinte:

#### **Atividade:<sup>3</sup> 1 palito em cada copo.**

Na sala de aula, disponha de um lado copos de plástico e do lado oposto palitos de picolé. Separe um certo número de copos e peça para que os alunos observem a quantidade em silêncio; depois, peça para que um aluno pegue do outro lado da sala uma quantidade de palitos que o permita colocar um em cada copo, sem faltar e nem sobrar. Após o aluno realizar a tarefa, pergunte:

- i) *Qual é a quantidade de copos que foi separada?*
- ii) *Qual é a quantidade de palitos que ele pegou?*
- iii) *Se ele tivesse pegado um número  $X$  de palitos, teria sobrado ou faltado?*

### Sistema de Numeração Decimal

O sistema de numeração que usamos para representar os números é *posicional*, no sentido de que tanto os algarismos (os símbolos elementares da notação) quanto suas posições relativas são relevantes. Didaticamente, isso constitui algo razoavelmente complexo que precisa ser cuidadosamente ensinado para garantir uma boa compreensão pelas crianças:

“Há uma complexidade no nosso sistema de numeração, a começar pelos símbolos que usamos na escrita dos números que são, altamente, abstratos. Além do mais, ele é decimal, posicional e a leitura é feita de maneira inversa. Estes fatos tornam a construção do significado do número uma ação que exige muita experiência com diferentes materiais didáticos e paciência, pois cada criança tem o seu tempo.”

Maria T. S. Sato, [1, Prefácio].

Nosso sistema decimal possui 10 algarismos:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

O número escrito com  $n$  algarismos  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ , posicionados em sequência da esquerda para a direita é dado por

$$a_n \dots a_2 a_1 := a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^0.$$

---

<sup>3</sup>Referência: [4].

Exemplo:

$$7532 = 2 + 30 + 500 + 7000.$$

Diversas atividades e materiais podem ser usados para consolidar a compreensão do sistema decimal, tais como ábacos, a Escala Cuisinairie e o Material Dourado.

**Atividade:** *Só até 9.*

**Objetivo:** Desenvolver a intuição sobre o sistema de numeração decimal.

**Pré-requisito:** Noções elementares de contagem e conhecimentos dos números naturais de 0 a 9.

**Material:** Material Dourado.

**Procedimento:**

1) Divida a turma em grupos pequenos (de 2 a 4 alunos) e os disponha ao redor de mesas, dando a cada grupo dois kits de Material Dourado.

2) Escolha um conjunto de peças e mostre aos alunos para eles reproduzirem em suas mesas.

3) Solicite aos alunos trocar as peças de modo a manter a quantidade representada inalterada e respeitar a regra ‘só até 9’: *só pode aparecer até 9 peças de cada tipo.*

Exemplo:

- Conjunto de peças: 12 peças de unidade, 22 peças de dezenas e 3 peças de centenas.

- Conjunto equivalente respeitando a regra ‘só até 9’: 2 peças de unidade, 3 peças de dezenas e 5 peças de centenas.

4) Solicitar aos alunos que escrevam o número representados pelas peças após a troca, começando da esquerda para a direita pelas peças de maior valor para as de menor valor.

Seguindo o exemplo, deveria ser escrito: 532.

*A atividade deve ser repetida até que os alunos tenham compreendido o procedimento com segurança.*

### 3 Adição e Subtração

*Contar é medir a quantidade de elementos de um conjunto finito.* A contagem pode ser realizada direta ou indiretamente. Contamos diretamente estabelecendo uma correspondência biunívica entre o conjunto em questão e um subconjunto especial de números naturais: uma sequência que começa no 1 e termina no número de elementos do conjunto, sem faltar nenhum número intermediário. Contamos indiretamente particionando o conjunto em subconjuntos disjuntos, contando a quantidade de elementos de cada subconjunto e *somando* os resultados.<sup>4</sup> Aliás, este é o significado fundamental da soma de dois números naturais:  *$m + n$  é a quantidade de elementos de um conjunto constituído por dois subconjuntos disjuntos, um com  $m$  e outro com  $n$  elementos.*

Diversas atividades e materiais podem ser usados para consolidar a compreensão da adição, tais como ábacos, a Escala Cuisinairie e o Material Dourado.

O **Sudoroku** é um jogo interessante e útil para trabalhar as operações de adição e subtração, inclusive favorecendo o desenvolvimento do cálculo mental!

**Atividade:** *Adição com Material Dourado.*

**Objetivo:** Desenvolver a intuição sobre a operação de adição

**Pré-requisito:** Conhecimento da representação decimal de números inteiros.

**Material:** Material Dourado.

**Procedimento:**

1) Divida a turma em grupos pequenos (de 2 a 4 alunos), cada um com dois kits de Material Dourado.

2) Inicialmente, o professor define dois conjuntos de peças do material dourado e escreve no quadro.

Exemplo:

- conjuntos escolhidos: um com ‘3 peças de dezenas e 17 peças de unidade’ e outro com ‘6 peças de dezenas e 16 peças de unidades’.

Então, cada grupo deve realizar a seguinte tarefa, descrita em etapas:

i) Determinar a representação decimal dos números definidos pelos dois conjuntos de peças e registrar numa folha;<sup>5</sup>

Seguindo o exemplo: ‘4 peças de dezenas e 7 peças de unidade’ e ‘7 peças de dezenas e 6 peças de unidades’.

ii) unir os conjuntos de peças e depois trocá-las sem alterar o total de modo a usar até 9 peças do mesmo tipo (no máximo);

iii) registrar numa folha a representação decimal do resultado da soma, conforme foi obtido pelas trocas;

Seguindo o exemplo: ‘123’.

iv) registrar o cálculo usando a notação padronizada;

Seguindo o exemplo: ‘ $47 + 76 = 123$ ’.

7) Finalmente, após os grupos realizarem o procedimento algumas vezes (digamos, 5 vezes), os grupos devem comunicar seus resultados, os quais devem ser comparados, discutidos e corrigidos pelo professor.

---

<sup>4</sup>O *Princípio Aditivo* diz exatamente que *o número de elementos da união de conjuntos disjuntos é a soma dos números de elementos de cada conjunto*. Desse princípio, podemos deduzir o chamado *Princípio Fundamental da Contagem*, ou *Princípio Multiplicativo*.

<sup>5</sup>O registro dos números iniciais pode ser precedido pela representação de cada número no Material Dourado, usando até 9 peças do mesmo tipo (no máximo); a repetição da tarefa deve tornar esta etapa desnecessária.

### 3.1 Situações-problema do campo aditivo

Os PCNs distinguem quatro situações típicas de ocorrência das operações de adição e subtração [2, pp.69-71]: *situações de combinação*, *situações de transformação*, *situações de comparação* e *situações com múltiplas transformações*.

- **Situações de combinação:** juntar e separar, etc.

- Exemplos:

- \* A sala possui 20 cadeiras e 4 mesas, portanto 24 móveis.
    - \* A sala possui 20 móveis, dos quais 4 são mesas e o restante cadeiras.

- **Situações de transformação:** aumentar e diminuir, ganhar e perder, etc.

- Exemplos:

- \* A aula começou com 23 alunos presentes, mas chegaram 5 atrasados, de modo que a aula terminou com 28 alunos.
    - \* A aula começou com 23 alunos presentes, mas terminou com 28. Quantos chegaram atrasados?

- **Situações de comparação:** quantidade a mais ou a menos, etc.

- Exemplos

- \* A turma da professora Maria tem 25 alunos, enquanto a turma da professora Zélia tem apenas 20. Quantos alunos a turma da professora Maria tem a mais do que a turma da professora Zélia?
    - \* A turma da professora Maria tem 25 alunos, enquanto a turma da professora Zélia tem cinco alunos a menos. Quantos alunos a turma da professora Zélia?

- **Situações com múltiplas transformações**

- Exemplos

- \* A conferência começou com 57 participantes, chegaram 14 atrasados e saíram 9 antes do término. Quantas pessoas estavam presentes ao final da conferência?

**No seu planejamento didático, o professor deve elaborar um conjunto adequado de problemas** para que os alunos compreendam todas as situações do campo aditivo. Recomendo seguir os seguintes princípios:

1. escolher problemas com graus variados de dificuldade, compatíveis com o nível intelectual dos alunos;
2. escolher problemas contextualizados em situações realísticas para o aluno, especialmente presentes no seu cotidiano;
3. apresentar e discutir problemas similares, mas com diferenças sutis na interpretação;
4. apresentar os problemas numa ordem progressiva de complexidade;
5. propor problemas desafiadores quando os alunos já tiverem consolidado os conhecimentos básicos;

**Naturalmente, o modo como um problema é enunciado pode facilitar ou dificultar sua interpretação pelos alunos.** Portanto, o professor deve prestar atenção na formulação dos problemas visando atingir os objetivos didáticos. Dentre outras questões, destacamos esta: *não se deve preferir sempre formulações fáceis de interpretar, pois é importante que os alunos aprendam a lidar com fatores complicadores.* Em particular, os alunos devem aprender a extrair do enunciado de um problema as informações necessárias para resolvê-lo, descartando informações irrelevantes; portanto, se é recomendável evitar enunciar problemas com informações desnecessárias quando introduzimos novos conceitos, certamente isso não é mais recomendável após os alunos terem adquirido familiarizado com esses conceitos.

Tais considerações são gerais, mas elas se aplicam particularmente ao ensino do campo aditivo:

“As pesquisas apontam que os problemas de composição [que abrangem a relação entre o todo e suas partes] estão mais presentes em contextos informais e muitas vezes são resolvidos pelas crianças por contagem, recontagem e de cabeça, principalmente se os valores envolvidos estiverem na casa das dezenas. Esses problemas podem ser resolvidos por uma adição ou subtração e o tipo de raciocínio para sua resolução pode sofrer uma pequena variação. No entanto, as perguntas podem facilitar ou dificultar a resolução dos problemas, por exemplo, se o valor desconhecido se refere a situação inicial ou intermediária, então é provável que o nível de dificuldade seja maior.”

Berton e Itacarambi [1, p.89].

## **Comunicação e Expressão**

É importante destacar que a comunicação é um importante elemento da educação em Matemática, envolvendo a capacidade de ler, interpretar, discutir e elaborar argumentos envolvendo conteúdos matemáticos. Em particular, atividades que envolvem a discussão, o relato e o registro de situações envolvendo a Matemática são necessárias para confrontar a ideia de que ‘quem gosta de Matemática pode ser desleixado com a Língua Portuguesa’. Quanto a isso, uma atividade interessante consiste em *pedir para que os alunos elaborem problemas, com base num texto ou num contexto discutido previamente.* Nesse caso, novos aspectos entram em questão, tais como a *consistência lógica da formulação.*

### **3.1.1 Situações-problema no Jogo do Bafo.**

Os seguintes 4 problemas podem ser apresentados e discutidos sequencialmente, visando tanto exercitar o aluno quanto possibilitar o professor avaliar informalmente seus conhecimentos. Nesse caso, o professor deve cuidar para detectar corretamente eventuais erros do aluno e ajudá-lo a refletir sobre os mesmos. Um modo de conduzir essa reflexão é usar um ábaco para ele possa registrar os números presentes no problema e indicar seus significados.

#### **Problemas no Jogo do Bafo**

1) Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi 5 num jogo de bafo. Com quantas fiquei?

2) Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi algumas num jogo de bafo e fiquei com 5. Quantas eu perdi?

3) Eu tinha algumas figurinhas da coleção Placar 2015. Depois de perder 12 jogando bafo, fiquei com 5. Quantas figurinhas eu tinha no início?

4) Eu tinha 12 figurinhas da coleção Placar 2015. Perdi 5 num jogo de bafo. Cada pacote com 10 figurinhas custa 2 reais na banca. Quantos reais eu preciso gastar para recuperar o número de figurinhas que eu perdi?

Seguem algumas observações e comentários sobre os problemas.

**Observação 1 (Sobre os problemas 1 e 2)** *Os problemas 1 e 2 têm os mesmos dados, mas as interpretações são diferentes. Para sondar se um aluno que respondeu corretamente as questões interpretou corretamente os problemas, pode-se pedir que ele ilustre seu raciocínio com um desenho.*

**Observação 2 (Sobre o problema 3)** *Uma resolução errada do problema 3 consiste em calcular a diferença  $12 - 5$ , obtendo como resultado 7. Esse erro típico geralmente decorre do costume de não se pensar numa justificativa para o cálculo, ou de “fazer uma conta sem saber o porquê.” Tal costume deve ser combatido pelo professor, considerando que, em Matemática, a justificativa da resposta de um problema é tão importante quanto a própria resposta.*

**Observação 3 (Sobre o problema 4)** *Este é um problema que pode ser levado para discussão, pois pode ser interpretado de duas formas:*

a) *o pacote de figurinhas custa 2 reais, mas podemos comprar 5 figurinhas pagando a metade do preço – neste caso, a resposta é que é necessário gastar 1 real;*

b) *pacote de figurinhas custa 2 reais e não se pode comprar 5 figurinhas separadas – neste caso, é necessário gastar 2 reais.*

*Podemos considerar ambas possibilidades corretas, mas é necessário observar se os alunos resolvem o problema 4 de forma consistente com uma interpretação ou outra.*

**Observação 4 (Sobre realidade e comunicação)** *Eventualmente, a atividade pode ser tornada muito mais interessante se os alunos são orientados a realmente jogar algumas partidas de bafo, com a tarefa de relatar o jogo para o restante da turma. O relato deve conter detalhes acerca do número de rodadas e dos números de figurinhas cada um começou, perdeu e terminou no jogo.*

### 3.1.2 Situação-problema: *Repartição justa?*

Esta atividade trabalha a contextualização da Matemática em situações de conflito de interesse. Deve ficar claro que *há situações em que o problema não possui uma solução consensual – significando que não é possível chegar a um acordo com base apenas na Matemática, mesmo quando ela é relevante para a situação.*

#### **Situação-problema: *Repartição justa?***

Dividir a turma em grupos de 3 ou 4 alunos para discutir a questão levantada pelo seguinte problema:

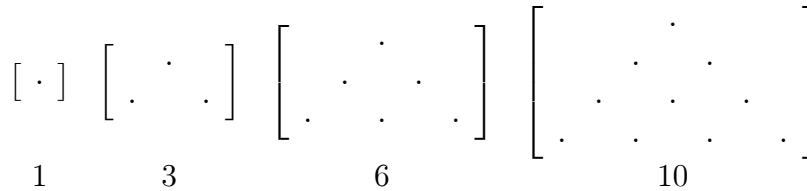
*Ana e eu, Maria, precisamos ir de Guriri para a rodoviária de São Mateus, mas está chovendo. Prefiro ir de táxi para evitar molhar os cabelos, mas Ana prefere ir de ônibus porque não se importa. A corrida de táxi custa 30 reais para nós duas, enquanto a de ônibus custa 3 reais para cada uma. Eu lhe proponho pegarmos um táxi juntas e dividir o custo, mas ela somente concorda se puder contribuir com apenas 10 reais. Decido aceitar a diferença, mas fico imaginando se o combinado foi justo. O que você acha?*

## 3.2 Atividades de investigação matemática

Muitas atividades exploratórias ou investigativas podem ser propostas para desenvolver a compreensão acerca dos números e das operações aritméticas. Para ilustrar, apresentamos duas tarefas investigativas semelhantes.

### Tarefa investigativa: *Números Triangulares.*

“Números triangulares” correspondem a figuras triangulares como nos seguintes exemplos:



Encontre novos números triangulares e descubra um método eficiente para dizer se um dado número é triangular ou não. Registre suas conclusões.

### Tarefa investigativa: *Somando 9.*

Divida a turma em grupos (de 2 ou 4 alunos) para investigar a seguinte tarefa.

Investigue as somas:

$$\begin{array}{rcl}
 9 & = & \text{-----} \\
 9 + 9 & = & \text{-----} \\
 9 + 9 + 9 & = & \text{-----}
 \end{array}$$

Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:

- 1) Efetue as somas indicadas.
- 2) Você percebe algum padrão?
- 3) É possível estender a regularidade?
- 4) Você consegue explicar o fenômeno?<sup>6</sup>

**Observação 5** Uma explicação que não envolve mencionar a multiplicação é a seguinte: como  $9 = 10 - 1$ , somar 9 a um número dado tem como resultado um número cuja representação decimal tem uma unidade simples a menos e uma unidade de dezena a mais; por tal razão, a soma dos algarismos das unidades e das dezenas permanece a mesma sempre que adicionamos 9, até chegar ao máximo de 10 parcelas.

<sup>6</sup>Uma explicação simples é a seguinte: como  $9 = 10 - 1$ , somar 9 a um número dado tem como resultado um número cuja representação decimal tem uma unidade simples a menos e uma unidade de dezena a mais; por tal razão, a soma dos algarismos das unidades e das dezenas permanece a mesma sempre que adicionamos 9, até chegar ao máximo de 10 parcelas.

**Tarefa investigativa: Somando 9 e outros números.**

*Divida a turma em grupos (de 2 ou 4 alunos) para investigar a seguinte tarefa.*

Investigue as somas:

$$\begin{array}{llll} 9 & = & \text{-----} & 9 + 9 + 1 & = & \text{-----} & 9 + 9 + 9 + 2 & = & \text{-----} \\ 9 + 9 & = & \text{-----} & 9 + 9 + 9 + 1 & = & \text{-----} & 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & \text{-----} \\ 9 + 9 + 9 & = & \text{-----} & 9 + 9 + 9 + 9 + 1 & = & \text{-----} & 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 2 & = & \text{-----} \end{array}$$

*Para orientar a exploração dos alunos (caso fiquem desorientados, sem saber o que fazer), questione:*

- 1) Efetue as somas indicadas.*
- 2) Você percebe algum padrão?*
- 3) É possível estender a regularidade?*
- 4) Você consegue explicar o fenômeno?*

## 4 Multiplicação e Divisão

A multiplicação de números naturais pode ser definida em termos da adição:  $n \times m$  é o número que resulta da adição de  $n$  parcelas iguais a  $m$ :

$$n \times m := \underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ parcelas}}$$

Com base nestas definição, podemos deduzir as propriedades algébricas da multiplicação, *viz.*, *comutatividade*, *associatividade* e *distributividade*. Entretanto, os significados da multiplicação não se esgotam nessa definição formal diretamente; conseqüentemente, nossa compreensão dessa operação requer o contato com situações nas quais seus significados são apreendidos intuitivamente. Os PCNs também desenvolvem essa mesma ideia:

“Uma abordagem freqüente no trabalho com a multiplicação é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição. Nesse caso, a multiplicação é apresentada como um caso particular da adição porque as parcelas envolvidas são todas iguais. (...) A partir dessa interpretação, definem-se papéis diferentes para o multiplicando (o número que se repete) e para o multiplicador (o número de repetições), não sendo possível tomar um pelo outro. (...) No entanto, essa abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas. / Além disso, ela provoca uma ambigüidade em relação à comutatividade da multiplicação.” [2, pp.71-72]

Analogamente à multiplicação, a divisão de números naturais pode ser definida a partir da operação de adição:

$$n \div m := \text{é o número que somado consigo mesmo } m \text{ vezes resulta em } n$$

ou

$$n \div m := \text{é o número de vezes que } m \text{ deve ser somado consigo mesmo para que o resultado seja } n.$$

Contudo, a divisão apresenta uma dificuldade inexistente na multiplicação: *nem sempre é possível dividir um número inteiro por outro, obtendo como resultado um número inteiro!* Nessas situações, devemos considerar a *divisão euclideana*, definida com base na multiplicação e na adição com a introdução dos termos *quociente* e *resto*:

A divisão do número natural  $m$  por  $n$  tem como resultado dois números naturais, o quociente  $q$  e resto  $r$  caracterizados pelas seguintes condições:

$$m = qn + r \quad , \quad 0 \leq r < n.$$

O quociente  $q$  é o número máximo de vezes que  $n$  pode ser somado consigo mesmo sem ultrapassar  $m$ ; o resto  $r$  é a diferença entre  $m$  e o produto  $qn$ .

As operações de multiplicação e divisão podem parecer simples para quem as entende bem, mas elas escondem uma razoável complexidade conceitual que precisa ser dominada pelos aprendizes. No passado, o assunto foi considerado bastante difícil:

“Será um verdadeiro entretenimento retragar as etapas de uma multiplicação egípcia ou de uma divisão suméria; compreender porque as quatro operações de aritmética, que nos parecem hoje elementares, representaram durante dezenas de séculos, para milhões de homens, uma arte obscura e complexa, reservada para uma elite incomum, geralmente os sacerdotes; e perceber talvez com espanto, que na Europa, há poucos séculos, ainda se calculava não com algarismos, mas com os dedos da mão ou por meio de fichas sobre mesas, e que se fazia a contabilidade através de entalhes em madeira. Daí que, para dominar os mistérios da multiplicação e da divisão, o filho de um rico comerciante da Idade Média necessitava de vários anos de estudos e passava pela vicissitude de uma viagem por toda a Europa – em suma, o equivalente ao doutoramento atual.”

Ifrah, [9, p.10]

## Significados da multiplicação e divisão

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem quatro grupos de situações relacionadas às operações de multiplicação e divisão:

- *Situações de comparação*: situações nas quais duas quantidades são comparadas, geralmente envolvendo termos explícitos tais como *dobro*, *triplo*, *metade*, *quarta parte*, etc.
- *Situações de proporcionalidade*: situações nas quais duas quantidades estão numa relação de proporção direta, do tipo “ $a$  está para  $b$  assim como  $c$  está para  $d$ ” [1, p.95].
- *Situações de configuração retangular*: situações que envolvem, direta ou indiretamente, o conceito de área de uma região retangular.
- *Situações combinatórias*: situações que envolvem uma contagem cujo resultado pode ser obtido pela aplicação do *Princípio Multiplicativo*.

**Princípio Multiplicativo:** numa situação de contagem que pode ser dividida em duas etapas independentes, se a primeira etapa possui  $n$  alternativas e a segunda etapa possui  $m$  alternativas, então o número total de alternativas é o produto  $nm$ .

Os diversos significados da multiplicação são aprendidos através da reflexão sobre situações que os envolvem, o que pode ocorrer dentro e fora da escola. Situações-problema instigantes e diversificadas podem ser elaboradas e aplicadas em sala de aula com a finalidade de consolidar esses significados, sem negar, mas eventualmente corrigindo, concepções adquiridas pelos estudantes fora da escola.

### 4.1 Situações-problema do campo multiplicativo

Algumas orientações e exemplos visando o ensino da capacidade de resolver problemas.

#### Resolver os problemas de diversas formas diferentes

**Problema:** A família de Clarinha compra 4 pães para o café da manhã todos os dias. Ela quer saber:

- 1) Quantos pães sua família compra toda semana?
- 2) Quantos pães sua família compra todos os meses?

[Resolver com um desenho, com material concreto e por um cálculo aritmético.]

**Problema:** João tem 96 livros para arrumar em 6 prateleiras. Ele quer colocar a mesma quantidade de livros em cada uma. Quantos livros ficarão em cada prateleira?

[*Resolver com um desenho, com material concreto e por um cálculo aritmético.*]

### **Apresentar problemas com níveis de complexidade crescente**

**Problema a:** A escola comprou 6 bolas para as aulas de educação física. Cada bola custou R\$74,00. Quanto a escola pagou por todas as bolas?

**Problema b:** A escola comprou 6 bolas para as aulas de educação física, três de futebol de salão, duas de vôlei e uma de basquete. As bolas de futebol de salão custaram R\$74,00, as de vôlei custaram R\$60,00 e a de basquete R\$125,00. Quanto a escola pagou por todas as bolas?

**Problema c:** A escola comprou bolas de futebol de salão, de vôlei e de basquete para as aulas de educação física. Cada bola de futebol de salão custou R\$74,00, cada uma de vôlei custou R\$60,00 e cada uma de basquete custou R\$125,00. Quantas bolas de cada a escola comprou se total pago foi de R\$592,00?

### **Apresentar problemas contextualizados, pois eles facilitam a compreensão e estimulam o interesse**

**Problema:** *Tempo de viagem.*

Minha filha nasceu em Rio Grande, RS. Hoje ela tem 7 anos e gosta de fazer perguntas, como a maioria das crianças. Outro dia, ela me perguntou sobre quanto tempo alguém gastaria para ir de São Mateus a Rio Grande de avião. Eu respondi que gastaria algumas horas. “E se for de ônibus?” Então, eu disse que gastaria alguns dias. “E se for a pé?” Bem, nesse caso tive que pensar. Afinal, quantos dias uma pessoa gastaria para ir de São Mateus a Rio Grande, considerando que a distância entre essas cidades é de cerca de 4 mil quilômetros e que uma pessoa com bom preparo físico é capaz de andar até 50 quilômetros por dia?

**Problema:** *Precisamos de saneamento básico?*

Perto da minha casa passa um córrego, mas não posso brincar lá porque ele é muito sujo e fedorento. Meu pai disse que é porque a cidade inteira despeja nele todo cocô que fazemos. Fiquei espantado imaginando quanto dá isso... Afinal, qual é a quantidade de fezes que produzimos em São Mateus todos os dias, considerando que a cidade tem 50 mil habitantes e cada um de nós contribui com cerca de 300g do material?

## 4.2 Atividades de investigação matemática

Exemplos de tarefas investigativas envolvendo a multiplicação.

**Tarefa investigativa: *Tabuada de 3.***

- i) Construa a tabuada de 3 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de  $10 \times 3$  e descubra o que acontece.

**Tarefa investigativa: *Tabuada de 5.***

- i) Construa a tabuada de 5 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de  $10 \times 5$  e descubra o que acontece.

**Tarefa investigativa: *Tabuada de 6.***

- i) Construa a tabuada de 6 e encontre o que ela tem de curioso.
- ii) Aumente a tabuada para além de  $10 \times 6$  e descubra o que acontece.

**Tarefa investigativa: *Números Quadrados.***

“Números quadrados” correspondem a figuras quadradas como nos seguintes exemplos:

$$\begin{array}{cccc} \left[ \begin{array}{c} \cdot \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{array}$$

Encontre novos números quadrados e descubra um método eficiente para dizer se um dado número é quadrado ou não. Registre suas conclusões.

**Tarefa Investigativa: *Potências Cúbicas.***

Os cubos dos primeiros números naturais podem ser escritos como somas de números ímpares:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 3 + 5 \\ 3^3 &= 7 + 9 + 11 \end{aligned}$$

- i) Descreva detalhadamente a propriedade observada.
- ii) Será que a propriedade permanece válida para outros cubos de números naturais?

**Tarefa investigativa: múltiplos de 37.**<sup>7</sup>

Complete a sequência de um modo interessante:

$$\begin{array}{rcl} 37 \times 3 & = & \text{-----} \\ 37 \times 6 & = & \text{-----} \\ 37 \times 9 & = & \text{-----} \\ \_ \times \_ & = & \text{-----} \end{array}$$

**Questão 1:** Tente descobrir até onde podemos ir seguindo o padrão.

**Questão 2:** O que acontece da décima linha em diante?

**Questão 3:** Procure uma explicação para o fenômeno.

**Tarefa investigativa: múltiplos de 15873.**

Procure descobrir algo interessante a partir do resultado da seguinte multiplicação:

$$15873 \times 7 = \text{-----}$$

As explicações para fenômenos do tipo exemplificados aqui podem possuir graus de dificuldade bastante variados. Para ilustrar, considere este desafio (para ver a explicação, leia o artigo indicado):

“Temas muito inocentes de aritmética básica, como contas de multiplicar, podem gerar resultados bastante interessante e surpreendentes, como ao multiplicar o número 142857 por 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

$$\begin{array}{rcl} 142857 \times 2 & = & 285714 \\ 142857 \times 3 & = & 428571 \\ 142857 \times 4 & = & 571428 \\ 142857 \times 5 & = & 714285 \\ 142857 \times 6 & = & 857142 \end{array}$$

Por que razão acontece essa repetição dos dígitos de 142857 ao multiplicá-lo por 2, 3, 4, 5 e 6, sempre com a mesma ordem circular? Será mera coincidência? Será possível obter outros exemplos desse tipo?

A resposta tem a ver com o resultado de  $142857 \times 7$ , que é 999999.”

Moreira, [12].

**Tarefa investigativa: quadrado mágico.**

O que este quadrado tem de mágico?

$$\begin{bmatrix} 6 & | & 2 & | & 4 \\ \hline - & & - & & - \\ 18 & | & 12 & | & 8 \\ \hline - & & - & & - \\ 36 & | & 72 & | & 24 \end{bmatrix}$$

**Tarefa investigativa: contar os grãos de 1kg de feijão.**<sup>8</sup>

Defina um procedimento para estimar o número de grãos num kilo de feijão, sem contá-los todos.

<sup>7</sup>Esta tarefa é apresentada e discutida em [10].

<sup>8</sup>Spinillo relata a solução dada por um aluno da 2a. série do ensino fundamental em [18, pp.90-91].

## A Cálculo Mental

Os Parâmetros Curriculares Nacionais distinguem quatro modalidades de cálculo: *cálculo mental*, *cálculo escrito*, *cálculo exato* e *cálculo aproximado*:

“A construção de um repertório básico constitui suporte para a ampliação dos diferentes procedimentos e tipos de cálculos que o aluno vai desenvolver ao longo dos ciclos iniciais: cálculo mental ou escrito, exato ou aproximado. / Os diferentes procedimentos e tipos de cálculo relacionam-se e complementam-se. O cálculo escrito, para ser compreendido, apóia-se no cálculo mental e nas estimativas e aproximações. Por sua vez, as estratégias de cálculo mental, pela sua própria natureza, são limitadas. É bastante difícil, principalmente tratando-se de cálculos envolvendo números com vários dígitos, armazenar na memória uma grande quantidade de resultados. Assim, a necessidade de registro de resultados parciais acaba originando procedimentos de cálculo escrito.” [2, p.75]

Quanto ao significado de *cálculo mental*, os PCNs definem:

“De forma simples, pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos” [2, p.117].

Por mais natural que seja essa definição, alguns pesquisadores a consideram demasiadamente estreita! Assim, Cecília Parra propõe uma definição mais abrangente de cálculo mental (denominado *cálculo pensado*):<sup>9</sup>

“Entenderemos cálculo mental o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido, para obter resultados exatos ou aproximados. / Os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números.”

Parra [13, p.189].

A noção de cálculo mental segundo Parra possui um elemento importante que falta na definição dada pelos PCNs: *a deliberação por uma estratégia não-algorítmica*. Esse elemento significa que o cálculo mental possui um repertório mais amplo do que o cálculo mecânico/automático (algorítmico), e não está necessariamente em oposição ao cálculo escrito – como os PCNs acabam reconhecendo quando dizem que o cálculo escrito se apóia no cálculo mental e o cálculo mental requer o cálculo escrito nas situações em que as operações são complexas ou os números envolvidos possuem muitos dígitos.

Para consolidar a diferença entre as definições de cálculo mental dadas por Parra e pelos PCNs, notamos que o seguinte desenvolvimento (quando escrito em papel) pode ser considerado cálculo mental para Parra, mas não para os PCNs [11, p.98]:

$$54 + 34 = 50 + 30 + 4 = 80 + 4 = 84$$

Discutindo ainda a noção de cálculo mental, é importante considerar sua estreita relação com a *estimação*:

---

<sup>9</sup>Nas minhas palavras, a definição de Parra para *cálculo mental* é: *realizar operações aritméticas ou algébricas seguindo estratégias deliberadas e não-algorítmicas* – podendo ser exato ou aproximado, feito com ou sem o auxílio de recursos materiais (como registros em papel ou computador). Nesse sentido, *cálculo mental* se contrapõe ao *cálculo mecânico* ou *automatizado* - e não coincide com a noção comum de “fazer contas de cabeça”.

“Um dos primeiros passos para o desenvolvimento do cálculo mental será o exercício da estimativa. O aluno deve desenvolver a sua capacidade de inferir o resultado possível para determinado cálculo. Só com o exercício continuado de estimativas o aluno ganhará capacidade de avaliar os resultados que obtém. A estimativa pode e deve ser usada junto com outros procedimentos, de maneira a antecipar, controlar, julgar a confiabilidade dos resultados. Assim, cálculo mental e estimativa possuem significados muito próximos. A relação entre eles está no fato do cálculo mental poder ser feito a partir de estimativa (cálculo aproximado mais geral) e estimamos a partir de um cálculo mental.”

Fontes [7, pp.41-42].

Como síntese, proponho a seguinte definição de *cálculo mental*: *calcular mentalmente é realizar operações aritméticas ou algébricas seguindo estratégias deliberadas* – de modo exato ou aproximado, com ou sem o auxílio de recursos materiais (como registros em papel ou computador). Nesse sentido, *cálculo mental* se contrapõe ao *cálculo mecânico* ou *automatizado* – e não coincide com a noção comum de “fazer contas de cabeça”.

No que tange ao ensino da Matemática, *o essencial é desenvolver nos estudantes a capacidade de escolher estratégias de cálculo adequadas para cada situação-problema*.

### **Por que ensinar cálculo mental na escola?**

Cecília Parra apresenta três motivos para o ensino do cálculo mental [13, pp.201-207]:

1. O cálculo mental “aumenta o conhecimento no campo numérico”.
2. O cálculo mental “favorece uma melhor relação do aluno com a matemática”.
3. As aprendizagens do cálculo mental “influem na capacidade de resolver problemas.” Especificamente, “o enriquecimento das relações numéricas através do cálculo mental facilita para os alunos, frente a uma situação, serem capazes de moldá-la, por antecipação, por reflexão”.

Fontes acrescenta que

“o trabalho com cálculo mental nos problemas é de extrema importância para a construção da autonomia da criança, pois permite gerar formas de proceder próprias de um sujeito autônomo, com flexibilidade, criatividade, capacidade de argumentação etc.”

Fontes [7, pp.51-52]

Em síntese,

“O cálculo mental permite à criança ter experiências que, mais tarde, a ajudarão a compreender a formalização das propriedades (nomear e saber as características associativa, comutativa etc, por exemplo). O trabalho com cálculo mental também permite à criança compreender a base decimal do nosso sistema de numeração, lidando com sua regra de diferentes maneiras. Desse modo, o próprio domínio do algoritmo é tanto mais fácil quanto maior for a capacidade de cálculo mental. A excessiva preocupação pela representação formal na matemática, destituída de sua relação com o cotidiano, leva à manipulação mecânica dos algoritmos, fazendo com que o aluno repita procedimentos iguais e mecânicos, sem a compreensão real de base do SND [sistema de numeração decimal] e das propriedades das operações, ambas fundamentais à construção dos conceitos matemáticos. É preciso construir uma noção de número e operação com sentido.”

[7, p.46]

## A.1 Atividades com cálculo mental

Diversos bricadeiras e jogos trabalham o cálculo mental, dentre eles a *Adivinhação Aritmética* A.1.1 o jogo *Soma Certa* A.1.3 e o *Jogo dos 17 Pontos* A.1.2.

Uma atividade simples de realizar consiste em pedir para realizar um cálculo sem usar “contas armadas” (mas com a permissão de usar lápis e papel):

### Atividade de cálculo mental

Realizar os seguintes cálculos sem usar contas armadas, mas podendo usar lápis e papel:

- 1)  $3680 + 4460$
- 2)  $3680 - 4460$
- 3)  $96 \times 12$
- 4)  $96 \div 12$
- 5)  $3680 - 96 \times 12$

### A.1.1 Adivinhação aritmética

**Nível:** Ensino Fundamental.

**Objetivo:** Trabalhar o cálculo mental e as operações aritméticas.

**Descrição:** O adivinhador deve dialogar com uma pessoa, conduzindo uma sequência de operações aritméticas de cujo resultado ele é capaz de deduzir o número inicial escolhido e mantido em segredo pela pessoa. As etapas do diálogo, em termos das sentenças pronunciadas pelo adivinhador são as seguintes:

- 1) Pense num número, mas não diga qual é.
- 2) Some 15.
- 3) Multiplique o resultado por 3.
- 4) Subtraia 9.
- 5) Divida por 3.
- 6) Subtraia 8.
- 7) Diga qual é o resultado final.
- 8) Então, o número que você pensou foi...

**Observação 6** *O truque consiste em subtrair 4 do resultado para obter o número inicial. Uma tarefa interessante e mais sofisticada consiste em explicar a razão do truque funcionar. Esta tarefa pode ser proposta para estudantes que já tenham consolidado a habilidade de registrar e manipular operações aritméticas complexas.*

### A.1.2 Jogo dos 17 Pontos

**Nível:** Educação Básica.

**Objetivo:** trabalhar o cálculo mental e a operação de adição.

**Material:** Dado e palitos.

**Descrição:** Para dois ou mais jogadores. O jogo é constituído por 5 disputas, cada disputa sendo constituída por rodadas (sequências) de lances do dado.

**Regras/Procedimento:**

- Determinar uma ordem para realizar os lances do dado.
- Em cada rodada, seguindo a ordem determinada, cada jogador deve (i) lançar o dado, (ii) somar mentalmente o número obtido ao valor que tinha anteriormente e (iii) declarar o resultado (começando do zero). Se o resultado for contestado pelos adversários e realmente estiver errado, o jogador perde o lance, não acrescentando nada ao valor que já tinha.
- Em cada disputa, as rodadas procedem até que um dos jogadores atinja a soma 17 ou um número superior; quando isso acontecer, a rodada deve ser completada para que todos obtenham seus resultados finais.
- Recebe dois palitos quem atingir 17 e um palito quem atingir o valor mais próximo deste (para mais ou para menos), havendo a possibilidade de empates.
- Após serem realizadas as 5 disputas, ganha o jogo quem possuir mais palitos, havendo a possibilidade de empate.

#### Comentários

1. Não é quem atinge primeiro um número maior ou igual a 17 que vence uma disputa (recebendo dois palitos), necessariamente; é preciso terminar a rodada para comparar os resultados de todos os jogadores.
2. O jogo pode ser modificado de várias maneiras, visando variar, facilitar ou dificultar:
  - (a) O dado pode conter 6, 10, 12 ou mais faces.
  - (b) O número a ser atingido pode ser outro, ao invés de 17.
  - (c) A operação aritmética pode ser a multiplicação, ao invés da adição.
  - (d) Pode-se trabalhar com a adição e a multiplicação, usando uma moeda para decidir qual deve ser realizada em cada lance.

**Observação 7** *Este jogo é mentalmente intensivo, visto que cada jogador deve manter os resultados de todos os jogadores na memória (o que é mais fácil se forem somente 2) e realizar todos os cálculos mentalmente, inclusive os dos adversários.*

Referência: [1, p.40].

### A.1.3 Jogo *Soma Certa*

**Nível:** Ensino Fundamental.

**Objetivo:** trabalhar o cálculo mental e a operação de adição.

**Material:** uma quantidade de cartões de formato idêntico, tendo num dos lados o registro de um número, de uma soma de duas parcelas, ou de uma parcela e do resultado de uma soma de duas parcelas; exemplos dos quatro tipos cartões:

$$\boxed{\dots = 8} \quad \boxed{5 + 3 = \dots} \quad \boxed{5 + \dots = 8} \quad \boxed{\dots + 3 = \dots}$$

**Descrição:** Para dois ou mais jogadores. Este é um jogo de memória no qual os participantes devem descobrir pares constituídos pela adição de duas parcelas e seu resultado; exemplo de pares:

$$\boxed{\dots = 8} \text{ e } \boxed{5 + 3 = \dots} ; \boxed{5 + \dots = 8} \text{ e } \boxed{\dots + 3 = \dots}$$

#### **Regras/Procedimento:**

- Os cartões devem ser embaralhados com seus registros virados para baixo.
- Determinar uma ordem para realizar as rodadas.
- Em cada rodada seguindo a ordem determinada, cada jogador deve virar dois cartões: se obtiver dois cartões em que um registra uma soma de duas parcelas e outro seu resultado, então ele pega os cartões para si e faz nova tentativa, repetindo até que erre; quando errar, ele vira novamente os cartões para baixo e passa a vez para o jogador seguinte.
- O jogo termina quando todas os cartões forem retirados.
- Ganha o jogo quem obtiver o maior número de cartões, havendo a possibilidade de empate.

**Comentários.** O jogo pode ser dificultado aumentando-se o número de cartões. Espera-se que os jogadores acabem decorando os resultados das somas depois de participarem de algumas partidas. Portanto, o jogo é bastante indicado para auxiliar a memorização da tabuada de adição.

## References

- [1] BERTON, Ivani C.B., ITACARAMBI, Ruth R.: *Números, brincadeiras e jogos*. Livraria Editora da Física, 2009.
- [2] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental: Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino de Primeira a Quarta Séries. MEC/SEF: Brasília, 1997.
- [3] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental: Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino de Quinta a Oitava Séries. MEC/SEF: Brasília, 1998.
- [4] Brousseau, Guy: *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdo e Métodos de Ensino*. Editora Ática: São Paulo, 2008.
- [5] DANTE, Luiz R.: *Didática da resolução de problemas de matemática - 9. ed.* Ática: São Paulo, 1997.
- [6] FERREIRA, Dores, PALHARES, Pedro, SILVA, Jorge N.: *Padrões e jogos matemáticos*. Revemat, no.1 (2008): pp.30-40. DOI: 10.5007/1981-1322.2008v3n1p30. URL: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p30> (Acessado em 15/04/2015.)
- [7] FONTES, Cintia G. da: *O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo: São Paulo, 2010.  
URL: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-11112010-162005/pt-br.php> (Acesso 14/04/2015)
- [8] FONSECA, Solange: *Metodologia de Ensino: Matemática*. Editora Lê: Belo Horizonte, 1997.
- [9] IFRAH, Georges: *Os números: história de uma grande invenção* – 11a. edição. Editora Globo: São Paulo, 2005.
- [10] ISODA, Masami, KATAGIRI, Shigeo: *Mathematical Thinking: How to Develop It in the Classroom*. World Scientific: Singapura, 2012.
- [11] Adair M. Nacarato, Brenda L.S. Mengali, Cármen L.B. Passos: *A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender*. Editora Autêntica: Belo Horizonte, 2011
- [12] MOREIRA, Carlos G.T.A.: *Números Mágicos e Contas de Dividir*. Revista Eureka!, vol.1, no.1 (1998): pp.38-40. URL: [http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista\\_eureka/docs/artigos/magicos.pdf](http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/magicos.pdf). Acesso em 13/04/2015.
- [13] PARRA, Cecília: *Cálculo Mental na Escola Primária*. In: PARRA, Cecília, SAIZ, Irma: *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Artmed: Porto Alegre, 1996: pp.186-235.
- [14] PIMENTAL, T., VALE, I.: *A descoberta de padrões no desenvolvimento do cálculo mental: uma experiência com professores do 1o. ciclo* [CD-ROM]. In COSTA, C., MAMEDE, E., GUIMARÃES, F. (orgs): *Números e Estatística: Reflectindo o presente, perspectivando o futuro*. XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática. Vila Real, p.16-17, maio/2009.
- [15] PONTE, João P. da, BROCARD, OLIVEIRA, Hélia: *Investigações Matemáticas na Sala de Aula – 3a. edição, revista e ampliada*. Autêntica: São Paulo, 2013.

- [16] SAIZ, Irma: : *Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir*. In: Cecília Parra, Irma Saiz: *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Editora Artmed: Porto Alegre, 1996: pp.162-191.
- [17] SILVA, Circe M. S. da, LOURENÇO, Simone T., CÔGO, Ana M.: *O Ensino-Aprendizagem da Matemática e a Pedagogia do Texto*. Editora Plano: Brasília, 2004.
- [18] SPINILLO, Maria G.: *O Sentido de Número e sua Importância na Educação Matemática*. In: BRITO, Márcia R.F. (org.): *Solução de Problemas e a Matemática Escolar – 2a. edição*. Editora Alínea, 2010: pp.83-111.