



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA PARA
PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA

FRAÇÕES

TÓPICOS TEÓRICOS E DIDÁTICOS

Jonas José Chequetto

jonasjosech@hotmail.com

Lúcio Souza Fassarella

luciofassarella@ufes.br

19 - 21 de maio de 2015

- 
- Você se lembra como aprendeu fração?
 - Como você ensina fração?
 - Quais as maiores dificuldades para o ensino?

O QUE SÃO FRAÇÕES?

Informalmente, *frações são representações de quantidades obtidas pela adição de partes de uma quantidade inteira.*

Para quaisquer pares de inteiros $p \geq 0$ e $q > 0$, definimos a fração com numerador p e denominador q por

p/q = medida de p partes obtidas da divisão de uma quantidade inteira q partes iguais.

Em particular,

$1/q$ = medida de uma parte obtida da divisão de uma quantidade inteira q partes iguais.

Não definimos frações com denominador nulo.

COMPARAÇÃO E EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES



Como comparar duas frações, de modo a saber, se as quantidades que elas representam são iguais ou diferentes, ou se uma é maior do que a outra?

Matematicamente, podemos deduzir o seguinte critério simples:

○ QUE SÃO FRAÇÕES?

Teorema 1: Dados a, b, c, d ; $a, c \geq 0$ e $b, d > 0$, valem:

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \geq bc$$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq cd$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

No caso em que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ teremos duas frações que representem a mesma quantidade de uma grandeza e essas são chamadas de *frações equivalentes*.

SOBRE O ENSINO

Além de estar presente em nosso cotidiano, mesmo que em suas formas mais simples, vale a ressalva de que “*o estudo das representações fracionárias também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico)*” (BRASIL, 1998, p. 103).

SOBRE O ENSINO

Nas aulas de Matemática, um dos conteúdos que tem grande resistência a ser estudado é o de Frações, desde os conceitos iniciais até aplicações a outras áreas da matemática. De fato, concordando com Lopes (2008, p. 20),

“O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, “carroções”, cálculo pelo cálculo”.

SOBRE O ENSINO

Magina e Malaspina (2013, p. 90) salientam que o conteúdo de frações

“[...] é visto pelos professores como um dos mais difíceis de ser ensinado. E, de fato, muitas pesquisas recentes [...] têm evidenciado essa dificuldade, vivida tanto pelos professores quanto pelos alunos brasileiros nos processos de ensino e de aprendizagem. Com relação ao seu ensino, o que se tem revelado são uma ênfase exagerada em procedimentos e algoritmos e uma forte tendência para traduzir esse conceito, apenas utilizando a exploração do significado parte-todo.”

SOBRE O ENSINO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática propõem, que no segundo ciclo, a abordagem dos racionais deve *“levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão”* (BRASIL, 1997, p. 101).

SOBRE O ENSINO

Nunes e Bryant (1997, p. 191) citados por Magina e Malaspina (2013, p. 91) salientam:

“Com as frações, as aparências enganam. Às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os mesmos termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhe escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, sem que ninguém perceba”.

SOBRE O ENSINO

Magina, Bezerra e Spinillo (2009, p. 413) relatam que

“o próprio conceito de fração é de natureza complexa e multifacetada. Por exemplo, dependendo da situação em que esteja inserida, a fração pode assumir diferentes significados. [...] Outro exemplo dessa complexidade é o fato de a fração estar fortemente associada a outros conceitos igualmente complexos como divisão, probabilidade, porcentagem, razão e proporção”.

SOBRE O ENSINO

- cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $1/3$, $2/6$, $3/9$, $4/12$, ..., são diferentes representações de um mesmo número;
- a comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $1/3 < 1/2$;
[...]
- se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $1/2$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10 (BRASIL, 1998, p. 101).

Significados de fração

Nessa direção, considerando estudos da pesquisadora Terezinha Nunes, Magina e Malaspina (2013) afirmam que o conceito de fração é mais bem aprendido quando são explorados cinco significados: parte-todo, medida, quociente, operador multiplicativo e número.

Significados de fração

- A fração como parte-todo está relacionada com a partição de um todo em partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$, onde n é o número de partes. Por exemplo, se temos uma figura dividida em 4 partes e colorirmos 3 delas, a fração que representa a parte colorida é $3/4$.
- ▣ Salete tinha uma barra de chocolate. Ela cortou em 2 pedaços de mesmo tamanho e comeu 1 pedaço. Você pode escrever, usando números, a fração do chocolate que Salete comeu?
- ▣ Larissa foi à pizzaria e pediu uma *pizza*. Ela dividiu a pizza em 5 pedaços iguais e comeu 1 pedaço. Qual a fração que Larissa comeu?

Significados de fração

- A fração como quociente ocorre quando se envolve a ideia de divisão. É o caso da situação: 4 barras de chocolate devem ser divididas para 5 crianças, escreva qual fração de chocolate cada uma irá receber.
- ▣ Marcos ganhou uma torta. Ele quer dividir a torta igualmente para dois amigos. Você pode escrever, usando números, a fração da torta que cada amigo irá receber?
- ▣ Carlos ganhou 2 chocolates para dividir igualmente entre 3 crianças. Qual fração do chocolate cada criança irá receber?

Significados de fração

- O significado de *medida* de uma fração surge quando uma quantidade é medida pela relação entre duas variáveis, como na probabilidade: em um saco há 8 bolas, das quais 2 são verdes e 6 são azuis; qual a probabilidade de alguém sem olhar pegar uma bola verde dentro do saco?
- ▣ Para pintar o seu quarto, Sara misturou 3 litros de tinta rosa com 1 litro de tinta branca. Que fração da mistura representa a tinta branca em relação ao total de tinta?

Significados de fração

- A fração como *operador Multiplicativo* ocorre quando pensamos na fração como valor escalar aplicado a uma quantidade, quando um número é um multiplicador da quantidade indicada. Por exemplo: numa mesa havia 12 botões e Bárbara ganhou $\frac{4}{6}$ deles; diga quantos botões ela ganhou.
- ▣ Bárbara ganhou um chocolate e comeu $\frac{2}{3}$. Desenhe o chocolate e pinte a parte que ela comeu.
- ▣ Cássio tinha 8 balas, sendo que $\frac{3}{4}$ eram de uva. Ele fez três grupos de balas de uva e um grupo de balas de maçã. Quantas balas de uva ele tinha?

Significados de fração

- Por último, assim como os naturais e os inteiros, as frações são *números* e não se referem necessariamente a uma quantidade específica.
- ▣ Um exemplo é pedir, em uma determinada régua, que se coloque o número $1/2$ em sua posição correta, onde a fração é trabalhada sem um referente específico.

Significados de fração

- Em outras palavras, uma mesma fração, por exemplo, $1/4$, pode adquirir diferentes significados. Pode ser uma relação parte-todo: uma *pizza* repartida em quatro pedaços iguais e um desses tomado, adquirindo ainda significado de quociente da divisão de duas variáveis. Poderíamos interpretar $1/4$ como um número na reta numérica: 0,25. Como operador: $1/4$ do quilo de açúcar, ou seja, 250g de açúcar. Como medida: $1/4$ como sendo a probabilidade de se tirar uma bola vermelha dentro de uma caixa que possui 1 bola vermelha e 3 bolas azuis.

Lógica da Equivalência e a Lógica da Ordenação

A lógica da equivalência é necessária para que o estudante entenda que, por exemplo, $1/3$ equivale à $3/9$, ou seja, que frações diferentes representam um mesmo número.

A lógica da ordenação está relacionada ao entendimento de que as frações não são ordenadas como os números naturais, como no caso em que temos frações de denominadores iguais: quanto menor o numerador, maior a fração. (MAGINA E MALASPINA, 2013).

Uso de Materiais manipuláveis e Jogos

Fiorentini e Miorim (1990) dizem que o uso do concreto, seja de materiais manipuláveis ou de situações que estejam próximas aos alunos, como fenômenos naturais ou acontecimentos cotidianos, são opções para o ensino. Ressaltam ainda, que os jogos também podem adquirir um papel importante na educação: “eles podem vir no início de um novo conteúdo com a finalidade de despertar o interesse da criança ou no final com o intuito de fixar a aprendizagem e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades” (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 3).

Jogo: Corrida das Frações

- ❑ Material: barras de Frações, que podem ser confeccionadas pelos próprios alunos. São 6 barras, sendo divididas em duas, três, quatro, cinco, seis e oito partes; e dois dados: o dado “quem” (basicamente, será o denominador da fração, em cada face estarão: $/2$, $/3$, $/4$, $/5$, $/6$, $/8$) e o dado “quanto” (será o numerador, com faces de 1 a 6).
- ❑ Como jogar: Delimita-se um fim ou o número de jogadas. Primeiramente joga-se o dado “quem”. Temos o denominador e a sua respectiva barra dividida. Depois joga-se o dado “quanto”. Tem-se “quantos” pedacinhos da barra o jogador andará naquela rodada.

Uso de Materiais manipuláveis e Jogos

A utilização de jogos pode ser de muita validade no processo de apropriação do conhecimento matemático. Nesse sentido, o “interesse pelos estudos da relação entre jogos e aprendizagem matemática sustenta-se na possibilidade de que todos os alunos possam, por meio de jogos, se envolverem mais na realização de atividades matemáticas” (MUNIZ, 2010, p. 26).

“Um uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los” (NACARATO, 2005, p. 4).

Sugestões de Materiais



- ❑ Escala Cusinaire;
- ❑ Cubo de Frações;
- ❑ Régua de Frações;
- ❑ Círculo de frações;
- ❑ Tangram.

Atividade utilizando Tangram

- ❑ Material: O Tangram de 7 peças, um quebra-cabeça chinês muito antigo, com peças que se encaixam perfeitamente formando um quadrado, onde temos 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo. É interessante que os próprios alunos o construam.
- ❑ Atividade: 1. Explicar o que é o Tangram. Deixar um espaço para o reconhecimento e familiarização do material. Pedir aos alunos que construam, por exemplo, dois quadrados com apenas duas peças cada, um quadrado com 4 peças, etc.

- 
- 2. Dado o tempo de contato inicial com o tangram, solicitar aos alunos que indiquem por uma fração qual a parte do quadrado todo cada peça representa. Solicitar que registrem em cada peça a fração que descreve essa parte.
 - 3. Pode se levantar questionamentos do tipo: quantos triângulos menores cabem num triângulo médio? E num grande? Questões essas, postas para levar os alunos a perceberem as operações de adição e subtração, também para a “equivalência de algumas peças”.

- 
- ❑ **Mídias digitais para Matemática (MDMat)** – Instituto de Matemática da UFRGS. Site repositório de mídias digitais para o ensino e aprendizagem de matemática. Disponível em: *http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/*

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

□ *Adição e Subtração*

- É fácil observarmos que quando os denominadores das frações que queremos somar/subtrair são iguais, apenas fazemos a operação com os numeradores.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

Adição e Subtração

- Os significados da adição e subtração de frações são intuitivos, mas é complicado justificar como devem ser operadas quando os denominadores são diferentes: para somar/subtrair frações, preliminarmente às escrevemos em termos de frações equivalentes com um denominador comum:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad - cb}{bd}$$

Adição e Subtração

□ Exemplos:

□ $1/4 + 2/4 =$

□ $3/5 - 2/5 =$

□ $1/2 + 3/5 =$

□ $2/5 - 1/3 =$

Adição e Subtração

- Atividade: Fichas para o ensino de frações
 - Por meio do jogo pode-se explorar a partição de um inteiro, a composição do inteiro, bem como a equivalência de frações e noções iniciais das operações.
 - Material: Jogo das fichas, feito com cartolina. A cartolina pode ser pintada pelos alunos ou pode-se ter uma de cada cor, as cores auxiliam na comunicação durante a atividade. Teremos 7 tipos de fichas com as seguintes dimensões e quantidades: 2 x 24 cm (1 ficha), 2 x 12 cm (2 fichas), 2 x 8 cm (3 fichas), 2 x 6 cm (4 fichas), 2 x 4 cm (6 fichas), 2 x 3 cm (8 fichas) e 2 x 2 cm (12 fichas); na qual a primeira delas representa o inteiro.
 - Atividades: A partir do jogo de fichas serão levantadas as seguintes questões (atentar para as cores).

Adição e Subtração

- 1. Partindo o Inteiro (Repetir as perguntas alternando as cores de todas as fichas).
 - ▣ Quantas fichas amarelas são necessárias para cobrir a ficha preta?
 - ▣ Que parte do inteiro representa uma ficha amarela?
 - ▣ Que parte do inteiro representa duas fichas amarelas?

- 2. Equivalências de frações. Utilizando as fichas tente completar as sentenças abaixo:
 - ▣ $1/2 = \dots = \dots = \dots = \dots$
 - ▣ $1/3 = \dots = \dots$
 - ▣ $1/4 = \dots = \dots$
 - ▣ $1/6 = \dots$
 - ▣ $2/3 = \dots$
 - ▣ $3/4 = \dots$

Adição e Subtração

□ 3. Adição e Subtração:

- $1/2 + 1/2 =$
- $1/3 + 1/3 =$
- $2/8 + 3/8 =$
- $3/4 - 1/4 =$
- $4/6 - 2/6 =$
- $4/12 - 2/12 =$

□ 4. Noções intuitivas de multiplicação e divisão:

- Que parte é a metade da terça parte do inteiro?
- Que parte é a metade da metade do inteiro?
- Quantos terços cabem exatamente no inteiro?
- Que parte é um quarto da metade do inteiro?
- Quantos quartos cabem exatamente em um meio?
- Quantos meios cabem exatamente em um inteiro?

Adição e Subtração

Jogo dos Pontinhos

•	$\frac{3}{4}$	•	$\frac{5}{4}$	•	$\frac{2}{7}$	•	$\frac{6}{8}$	•	$\frac{1}{2}$	•
•	$\frac{1}{8}$	•	$\frac{6}{2}$	•	$\frac{10}{8}$	•	$\frac{1}{10}$	•	$\frac{2}{2}$	•
•	$\frac{0}{9}$	•	$\frac{5}{5}$	•	$\frac{9}{2}$	•	$\frac{3}{9}$	•	$\frac{6}{8}$	•
•		•		•		•		•		•

Multiplicação

- Multiplicar uma fração por um número inteiro é o mesmo somar a fração n vezes:

$$n \times \frac{p}{q} = \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q} \text{ (} n \text{ vezes)} = \frac{np}{q}$$

- Para a multiplicação de frações, de forma geral, fazemos:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Multiplicação

□ Exemplos:

□ $3 \times \frac{2}{5} =$

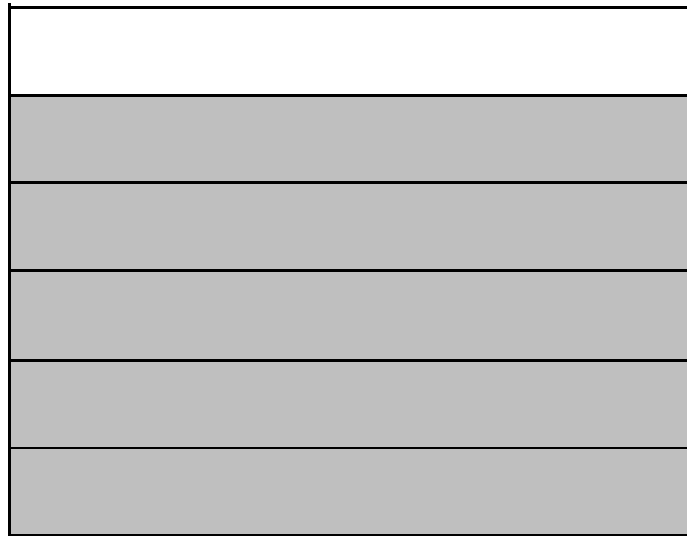
□ $\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} =$

Multiplicação

□ “partes de partes do total”

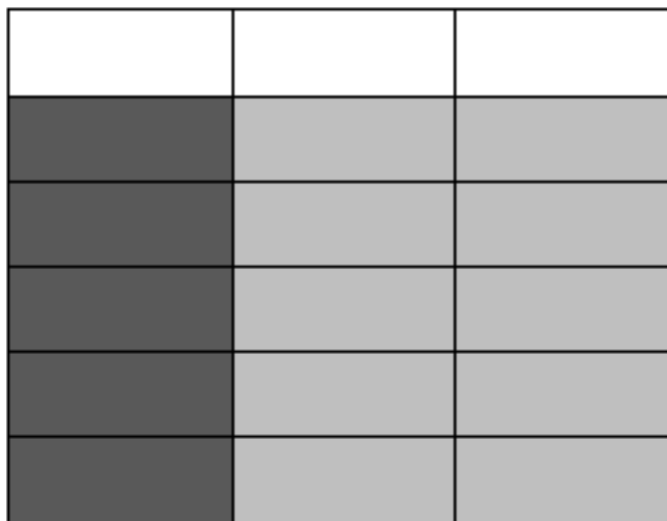
Por exemplo, $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$ pode ser interpretado como $\frac{1}{3}$ dos $\frac{5}{6}$ de um todo.

$\frac{5}{6}$ de um todo



Multiplicação

$\frac{1}{3}$ dos $\frac{5}{6}$



Temos então, $\frac{5}{18}$ como resultado. Ou seja: $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$

Divisão

Definimos a divisão como:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

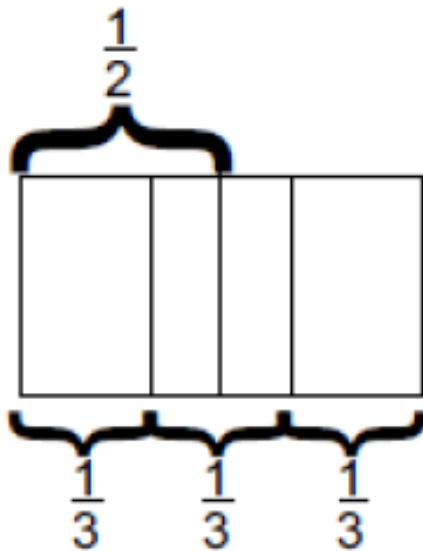
Exemplo:

$$3/4 : 2/5 =$$

Divisão

□ “partes que cabem em partes”

Por exemplo, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ pode ser interpretado como quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$



Observamos que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$

Dessa forma: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Divisão

- “um quociente não se altera quando dividendo e divisor são multiplicados por um mesmo número”

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} = \frac{\frac{15}{8}}{1} = \frac{15}{8}$$

- Daí:

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$$

- Jogos Tradicionais

- ▣ Dominó;

- ▣ Bingo;

- ▣ Jogo da memória.

- Atividades: MDMídias

REFERÊNCIAS

- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/1ª à 4ª séries**. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/5ª à 8ª séries**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.
- FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim SBEM**, São Paulo, ano 4, n. 7, p. 3-10, 1990.
- LOPES, Antonio José. O que os Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 1-22, 2008.
- MAGINA, Sandra; BEZERRA, Francisco Brabo; SPINILLO, Alina. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. **Revista Brasileira de estudos Pedagógicos**, v. 90, n. 225, p. 411-432, mai./ago. 2009.
- MAGINA, Sandra; MALASPINA, Maria da Conceição de Oliveira. A fração nos anos iniciais: uma perspectiva para seu ensino. In: SMOLE, Katia Stocco; MUNIZ, Cristiano Alberto (Orgs.). **A Matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental**. Porto Alegre: Penso, 2013. P. 89-114.
- MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e Jogar: enlances teóricos e metodológicos no campo da educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
- NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 1-6, 2005.



OBRIGADO

=]